www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

MAYOTTE, RÉUNION
2023

LA PYRAMIDE ABCD

CORRECTION

1. Déterminons une représentation paramétrique de (d):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a ; b ; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici:
- la droite (d) passe par le point **A (1 ; 1 ; 0)**
- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) est: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; 2 ; - 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \times t \\ y = 1 + 2 \times t \\ z = 0 + (-1) \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminons les coordonnées du point B:

Le point B est le point d'intersection entre la droite (d) et le plan P ayant pour équation: $x + 4y + 2z + 1 = 0$.

Les coordonnées du point B vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_B = 1 & (1) \\ y_B = 1 + 2t & (2) \\ z_B = -t & (3) \\ x_B + 4y_B + 2z_B + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_B + 4y_B + 2z_B + 1 = 0 \iff 1 + 4(1 + 2t) + 2(-t) + 1 = 0$$

$$\iff 6t + 6 = 0$$

cad $t = -1$.

Les coordonnées du point B sont donc bien: • $x_B = 1 = 1$

- $y_B = 1 + 2 \times (-1) = -1$
- $z_B = -(-1) = 1$

3. a. Vérifions que les points A, B et C définissent un plan:

Nous savons que: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, les points A, B et C définissent un plan ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}} \neq z_{\overrightarrow{AC}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

Donc les points A, B et C définissent bien un plan noté (ABC).

3. b. Montrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC):

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Nous savons que le plan (ABC) admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) ssi: **$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.**

Or : $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases}$

Nous avons:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-1) = 0$.

Comme $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

3. c. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n} (a ; b ; c)$ s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici:
- une vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- le point $A \in (ABC)$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x - 1) + 0 \times (y - 1) + 0 \times (z - 0) = 0$$

cad $x - 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc: $x - 1 = 0$.

4. a. Justifions que le triangle ABC est isocèle en A:

Le triangle ABC est isocèle en A ssi **ses deux côtés AB et AC sont de même longueur** cad ssi $AB = AC$.

Or ici: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Et: • $AB = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

• $AC = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Donc $AB = AC$ et par conséquent: le triangle ABC est bien isocèle en A.

4. b. b_1. Calculons la longueur AH:

Le point H est le milieu du segment [BC].

Les coordonnées du point H sont donc: • $x_H = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = 1$

• $y_H = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = -1$.

• $z_H = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = 0$

Dans ces conditions, la longueur AH est: $AH = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (0^2)} = \sqrt{4}$.

D'où la longueur AH est égale à: 2.

4. b. b$_2$. Calculons l'aire du triangle ABC:

Comme le triangle ABC est isocèle en A, la droite (AH) est la hauteur relative au côté [BC].

Soit $\mathcal{A}$, l'aire du triangle ABC: $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AH}{2} = BC$ car $AH = 2$.

Or: $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4}$.

L'aire du triangle isocèle ABC est donc: $\mathcal{A} = \sqrt{4} = 2$.

5. a. Montrons que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD:

Ici les coordonnées du point D sont: $(0; -1; 1)$.

D'où: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ -1 - (-1) \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{n}$.

Comme $\overrightarrow{BD} = -\vec{n}$, nous pouvons affirmer que: la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

5. b. Déduisons-en le volume de la pyramide ABCD:

La pyramide ABCD a pour **hauteur [BD]** et pour **base le triangle ABC**.

D'après le cours, le volume V d'une pyramide est: $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$.

($\mathcal{B}$ = base, h = hauteur)

Or: $h = BD = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = 1$.

Dans ces conditions: $V = \frac{\mathcal{A} \times 1}{3} = \frac{2 \times 1}{3}$.

Le volume de la pyramide ABCD est donc: $V = \frac{2}{3}$.