BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

MAYOTTE, RÉUNION
2023

$$U_{n+1} = \frac{6\,U_n + 2}{U_n + 5}$$

CORRECTION

1. Calculons U_1:

Ici: • $U_{n+1} = \dfrac{6\,U_n + 2}{U_n + 5}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 8$.

Dans ces conditions: $U_1 = \dfrac{6 \times U_0 + 2}{U_0 + 5} = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \dfrac{50}{13}$.

Ainsi: $U_1 = \dfrac{50}{13}$.

2. a. a₁. Montrons que f est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{6x + 2}{x + 5}$ $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• $\mathcal{D}f = [\,0\,;+\infty\,[$.

• **Calculons f':**

La fonction $f(x) = \dfrac{6x + 2}{x + 5}$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient de deux fonctions polynômes dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec $x + 5 \neq 0$ sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{(6) \times (x+5) - (6x+2) \times (1)}{(x+5)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right)$$

$$= \frac{28}{(x+5)^2}.$$

• Étudions le signe de f' sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

Comme $28 > 0$ et $(x+5)^2 > 0$ sur $[\,0\,; +\infty\,[$: $f'(x) > 0$ et par conséquent f est strictement croissante.

Le minimum de f est le point : $A\,(0\,; f(0))$ cad $A\,(0\,; 0,4)$.

2. a. a$_2$. Déduisons-en que pour réel $x > 2$, $f(x) > 2$:

$$f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = 2.$$

Comme f est strictement croissante sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

$$x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2.$$

2. b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$:

Ici : • $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{6\,U_n + 2}{U_n + 5}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 8$.

• f est strictement croissante sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 2$ ".

Initialisation: $U_0 = 8 > 2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n > 2$ et montrons qu'alors $U_{n+1} > 2$.

Supposons: $U_n > 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) => $f(U_n) > f(2)$

=> $U_{n+1} > 2$. $(f(2) = 2)$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $U_n > 2$.

3. a. Montrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

Or:
- $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(2 - U_n)(U_n + 1)}{U_n + 5}$
- $U_n + 5 > 0$ car $U_n > 2$
- $2 - U_n < 0$ car $U_n > 2$
- $U_n + 1 > 0$ car $U_n > 2$.

Dans ces conditions, $U_{n+1} - U_n < 0$ et par conséquent: la suite (U_n) est bien décroissante. Elle est même strictement décroissante.

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après les questions précédentes pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} U_{n+1} - U_n < 0 \\ U_n > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est strictement décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 2 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite strictement décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente

4. a. Calculons V_0:

Ici: • $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$

• $n \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions: $V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{2}{3}$.

Ainsi: $V_0 = \frac{2}{3}$.

4. b. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$:

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1} \iff V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1}$$

$$\iff V_{n+1} = \frac{\left(\frac{6\,U_n + 2}{U_n + 5}\right) - 2}{\left(\frac{6\,U_n + 2}{U_n + 5}\right) + 1}$$

$$= \frac{4U_n - 8}{7U_n + 7}$$

$$= \frac{4}{7} \times \left[\frac{U_n - 2}{U_n + 1} \right]$$

$$= \frac{4}{7} \times V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent: la suite (V_n) est bien géométrique de raison $q = \frac{4}{7}$.

4. c. c$_1$. Déterminons la limite de la suite (V_n):

- Le premier terme V_0 de la suite (V_n) est: $V_0 = \frac{2}{3}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $V_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7} \right)^n$.

- Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7} \right)^n$

$$= 0 \text{ car } \frac{4}{7} \in \left]0\,;1\right[.$$

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$.

4. c. c$_2$. Déduisons-en la limite de (U_n):

Nous savons que: $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$.

D'où: $U_n = \frac{V_n + 2}{-V_n + 1}$.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{V_n + 2}{-V_n + 1} \right)$

$= \dfrac{0 + 2}{0 + 1}$

$= 2.$

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2.$

4. d. Donnons la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) et interprétons:

La valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) est: 14.

Il s'agit du premier terme inférieur à 2, 001.