BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

2023

LE VOLUME DU CÔNE

CORRECTION

1. Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés:

Nous savons que: $A(3; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(-2; -5; 1)$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés ssi **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires**.

Or: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ -5 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et: $x_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{5} \times x_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}} \neq \frac{1}{5} \times z_{\overrightarrow{AC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent **les points A, B et C ne sont pas alignés**.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et ils définissent un plan noté (ABC).

2. Montrons que le triangle ABC est rectangle en A:

Le triangle ABC est rectangle en A ssi: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Or: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -5-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:
- $BC^2 = (-4)^2 + (-6)^2 + (-1)^2 = 53$
- $AB^2 = (-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 = 3$
- $AC^2 = (-5)^2 + (-5)^2 + (0)^2 = 50$.

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est: rectangle en A.

3. Vérifions que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $-x + y - 2z + 5 = 0$:

Les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent le plan (ABC).

- Les points A, B et C vérifient-ils l'équation cartésienne $-x + y - 2z + 5 = 0$?
  - A vérifie bien " $-x + y - 2z + 5 = 0$ " car $-3 + 0 - 2 \times (1) + 5 = 0$,
  - B vérifie bien " $-x + y - 2z + 5 = 0$ " car $-2 + 1 - 2 \times (2) + 5 = 0$,
  - C vérifie bien " $-x + y - 2z + 5 = 0$ " car $-(-2) + (-5) - 2 \times (1) + 5 = 0$.

- Une équation du plan (ABC) ?

Comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés, une équation cartésienne du plan (ABC) est:

$$M (x ; y ; z) \in (ABC) \iff -x + y - 2z + 5 = 0.$$

En conclusion, le plan (ABC) a bien pour équation cartésienne:

$$-x + y - 2z + 5 = 0.$$

4. **Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ):**

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\,(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ici:
- la droite (Δ) passe par le point $S(1 ; -2 ; 4)$
- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (Δ) est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(coefficients de x, y et z dans $-x + y - 2z + 5 = 0$)

D'où une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par S et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + (-1) \times t \\ y = -2 + 1 \times t \\ z = 4 + (-2) \times t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. **Montrons que les coordonnées du point H sont (0 ; - 1 ; 2):**

H est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = 1 - t & (1) \\ y_H = -2 + t & (2) \\ z_H = 4 - 2t & (3) \\ -x_H + y_H - 2z_H + 5 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

(4) $\Longleftrightarrow -x_H + y_H - 2z_H + 5 = 0 \Longleftrightarrow -(1 - t) + (-2 + t) - 2(4 - 2t) + 5 = 0$

$\Longleftrightarrow -1 + t - 2 + t - 8 + 4t + 5 = 0$

$\Longleftrightarrow 6t - 6 = 0$

cad $t = 1$.

Les coordonnées du point H sont donc:

- $x_H = 1 - 1 = 0$
- $y_H = -2 + 1 = -1$.
- $z_H = 4 - 2 = 2$

6. Calculons la valeur exacte de la distance SH:

La distance SH $= \sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S)^2 + (z_H - z_S)^2}$

$= \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - (-2))^2 + (2 - 4)^2}$

$= \sqrt{6}$.

La valeur exacte de la distance SH est donc: $\sqrt{6}$.

7. Déterminons l'aire exacte du disque D:

Soit $\mathscr{C}$ le cercle inclus dans le plan (ABC), de centre H et passant par le point B.

D est le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.

L'aire du disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$ de centre H et passant par le point B est: $\mathscr{A} = \pi R^2$ cad $\mathscr{A} = \pi HB^2$.

Or: $HB^2 = (x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2 + (z_B - z_H)^2$

$= (2 - 0)^2 + (1 - (-1))^2 + (2 - 2)^2$

$= 4 + 4 + 0$

$= 8$.

La valeur exacte de l'aire du disque D est donc: $\mathscr{A} = 8 \times \pi$.

8. Déduisons-en la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque D:

D'après le cours, le volume d'un cône est donné par la formule:

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}.$$

$$(R^2 = HB^2 \text{ et } h = SH)$$

La valeur exacte du volume du cône est donc: $V = \dfrac{8 \times \pi \times \sqrt{6}}{3}.$