BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 2

2023

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Justifions que la fonction f est définie sur $]-1 ; +\infty[$:

Ici: • $f(x) = x - \ln(1 + x)$ $\quad (U - \ln(V))$

• $\mathcal{D}f = ?$

La fonction $f(x) = x - \ln(1 + x)$ est définie ssi: $1 + x > 0$ cad $x > -1$.

Ainsi, la fonction f est définie sur: $]-1 ; +\infty[= \mathcal{D}f$.

2. Déterminons la dérivée f' de la fonction f:

La fonction $f(x) = x - \ln(1 + x)$ est définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x}$ $\quad \left(U' - \dfrac{V'}{V}\right)$

$$= \frac{x}{1 + x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

3. a. Déduisons-en le sens de variation de la fonction f sur $]-1\,;+\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, **sachant que** $1 + x > 0$.

1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $x \leqslant 0$ cad ssi : $x \in]-1\,;0]$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$ cad ssi : $x \in [0\,;+\infty[$.

Ainsi : • f est décroissante sur $]-1\,;0]$,

• f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. b. Déduisons-en le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]-1\,;+\infty[$ est :

x	-1		0		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ a	↘	b	↗	c

Avec : • $a = \lim\limits_{x \to -1} f(x)$

- $b = f(0) = 0$ (minimum de f sur $]-1;+\infty[$)

- $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Son minimum étant nul, pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f(x) \geqslant 0$.

4. a. Montrons que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right)$:

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f(x) = x - \ln(1+x)$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+x)$$

$$= \ln\left[\frac{e^x}{1+x}\right].$$

Ainsi pour tout $x \in]-1;+\infty[$: $f(x) = \ln\left[\dfrac{e^x}{1+x}\right]$.

4. b. Déduisons-en la limite en $+\infty$ de la fonction f:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left[\frac{e^x}{1+x}\right].$$

Or d'après le cours:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1+x} = +\infty$ (Croissances Comparées)

- $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

PARTIE B

1. Donnons la valeur arrondie de U_1:

Ici: • $U_{n+1} = U_n - \ln(1 + U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 10$.

D'où: $U_1 = U_0 - \ln(1 + U_0)$

$= 10 - \ln(1 + 10)$

$= 10 - \ln(11)$

$\approx 7,602$.

Ainsi: $U_1 \approx 7,602$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geq 0$ ".

Initialisation: $U_0 \geq 0$?

Comme $U_0 = 10 \geq 0$, nous avons bien: $U_0 \geq 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \geq 0$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \geq 0$.

Supposons: $U_n \geqslant 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow U_n \geqslant 0 \Rightarrow f(U_n) \geqslant f(0) \Rightarrow U_n - \ln(1 + U_n) \geqslant 0 \Rightarrow U_{n+1} \geqslant 0.$

(f est croissante sur $[0; +\infty[$)

Conclusion: Pour tout entier n, $U_n \geqslant 0$.

3. Montrons que la suite (U_n) est décroissante:

La suite (U_n) est décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = [U_n - \ln(1 + U_n)] - U_n$

$= -\ln(1 + U_n) \leqslant 0$, car $U_n \geqslant 0$.

Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$: la suite (U_n) est décroissante.

4. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après les questions précédentes: $\begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 0 \; (U_n \geqslant 0) \end{cases}$.

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

5. Déterminons la limite " ℓ " vers laquelle la suite (U_n) converge:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$f(\ell) = \ell.$$

$$f(\ell) = \ell \iff \ell = \ell - \ln(1+\ell)$$

$$\iff \ln(1+\ell) = 0$$

$$\iff 1+\ell = e^0$$

$$\iff 1+\ell = 1 \quad \text{cad} \quad \ell = 0.$$

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 0$.