www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

POLYNÉSIE
2022

LA PYRAMIDE ABCE & SON VOLUME

CORRECTION

1. a. Démontrons que le triangle ABC est rectangle en A:

Nous avons: $A\,(2\,;-1\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;-3)$ et $C\,(6\,;6\,;1)$.

Le triangle ABC est rectangle en A ssi: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Or: • $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

• $$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 6-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 6-0 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions: • $AB^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-3)^2 = 11$

• $AC^2 = 4^2 + 7^2 + 1^2 = 66$

• $BC^2 = 5^2 + 6^2 + 4^2 = 77.$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A.

1. b. b$_1$. Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$:

Nous avons: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1 \times 5) + ((-1) \times 6) + (3 \times 4)$

$$= 5 - 6 + 12$$

$$= 11.$$

D'où: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 11$.

1. b. b$_2$. Calculons les longueurs BA et BC:

La longueur BA est égale à: $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$.

La longueur BC est égale à: $\sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}$.

Les longueurs BA et BC sont donc respectivement: $\sqrt{11}$ et $\sqrt{77}$.

1. c. Déduisons-en la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$:

L'angle $\widehat{ABC}$ noté α est tel que: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}$ (cours)

$$\iff \cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{11} \times \sqrt{77}}$$

cad $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \approx 68°$.

2. a. Montrons que le plan P est parallèle au plan (ABC):

Nous savons que:
- une équation cartésienne de P est $2x - y - z + 4 = 0$,
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne sont pas colinéaires** car le triangle ABC est rectangle en A.

D'où:
- un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- les points **A, B et C ne sont pas alignés** et définissent le plan P.

$\vec{n}$ est donc orthogonal au plan P.

Si en plus, il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, nous pourrons alors affirmer que P est parallèle au plan (ABC).

Or:
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (2 \times (-1)) + ((-1) \times 1) + ((-1) \times (-3)) = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (2 \times 4) + ((-1) \times 7) + ((-1) \times 1) = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à P, à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$: le plan P est bien parallèle au plan (ABC).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (ABC):

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A (x_A ; y_A ; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) s'écrit:

$$a (x - x_A) + b (y - y_A) + c (z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• le point A ∈ (ABC), avec $A = (2 ; -1 ; 0)$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

<=> $2 \times (x - 2) + (-1) \times (y - (-1)) + (-1) \times (z - 0) = 0$

cad $2x - y - z - 5 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc: $2x - y - z - 5 = 0$.

2. c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite D:

La droite D est orthogonale au **plan (ABC)** et passe par le point **E (1; 2; 4)**.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}\,(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite D passe par le point **E (1; 2; 4)**,

- un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D est: $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite D passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}$ $(2\,;-1\,;-1)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times t \\ y = 2 + (-1) \times t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + (-1) \times t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite D est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - t \end{cases}$$

2. d. Déterminons les coordonnées du point H:

Le point H est le projeté orthogonal de E sur le plan (ABC).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t & (1) \\ y_H = 2 - t & (2) \\ z_H = 4 - t & (3) \\ 2x_H - y_H - z_H - 5 = 0 & (4) \end{cases}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff 2x_H - y_H - z_H - 5 = 0 \iff 2 \times (1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0$$

$$\iff 2 + 4t - 2 + t - 4 + t - 5 = 0$$

$$\iff 6t - 9 = 0$$

cad $t = \dfrac{3}{2}$.

Les coordonnées du point H sont donc:
- $x_H = 1 + 2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right) = 4$
- $y_H = 2 - \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
- $z_H = 4 - \left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$

3. a. Calculons l'aire du triangle ABC:

L'aire du triangle (ABC), rectangle en A est:

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{cad} \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2}.$$

L'aire du triangle (ABC) est égale à: $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$ unités d'aire.

3. b. Montrons que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5:

Nous savons que: volume d'une pyramide $= \dfrac{1}{3} \times b \times h$.

(b = aire d'une base, h = hauteur à cette base)

La pyramide ABCE a pour **hauteur [HE]** et pour **base le triangle ABC, rectangle en A**.

Or: • $[HE] = \sqrt{(1-4)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $(= h)$

• $\mathcal{A}(ABC) = \frac{11\sqrt{6}}{2}$. $(= b)$

D'où: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{11 \times \sqrt{18}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{11 \times 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$= 16,5$ unités d'aire.

En conclusion, le volume de la pyramide ABCE est bien égal à:

16, 5 unités d'aire.