BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

NOUVELLE CALÉDONIE

2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES D A B D B D

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et la suite (U_n) est...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

$$\iff \frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\iff \frac{-1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

D'après le théorème des gendarmes, nous pouvons donc affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$$

Ainsi: la suite (U_n) converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = e^{-2V_n} + 2$ avec $V_0 = \ln(a)$ et...

D'après l'énoncé: • $W_n = e^{-2V_n} + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $V_0 = \ln(a)$ avec $a > 0$.

Dans ces conditions: $W_0 = e^{-2V_0} + 2$

$\Longleftrightarrow$ $W_0 = e^{-2\ln(a)} + 2$

$\Longleftrightarrow$ $W_0 = e^{\ln(a^{-2})} + 2$ $\quad (r\ln(a) = \ln(a^r))$

$\Longleftrightarrow$ $W_0 = a^{-2} + 2$

cad $W_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$

Nous pouvons donc affirmer que: $W_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$.

3. $W_n = e^{-2V_n} + 2$ avec la suite (V_n) croissante ; la suite (W_n) est alors...

D'après l'énoncé: • $W_n = e^{-2V_n} + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• la suite (V_n) est croissante.

Dans ces conditions: $W_n = \dfrac{1}{e^{2V_n}} + 2$.

Comme la suite (V_n) est croissante et se trouve au dénominateur, la suite (W_n) est donc décroissante.

De plus, (W_n) est minorée par 2, en procédant par élimination !

En conclusion, nous pouvons affirmer que: la suite (W_n) est décroissante et est minorée par 2.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{8}{3}$ avec $a_0 = 2$ et...

D'après l'énoncé: • $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{8}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $a_0 = 2$.

Dans ces conditions: $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} + \frac{8}{3}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} a_{n-2} + \frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{n-2} + 2 \times \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{3} a_{n-3} + \frac{8}{3}\right] + 2 \times \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 a_{n-3} + 3 \times \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n-n} + n \times \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n a_0 + \frac{8n}{3}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$ et...

D'après l'énoncé: • $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or: $(b_n)^2 \geqslant 0$.

Donc: $(b_n)^2 + 3 \geqslant 3$ et par conséquent $\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$.

Dans ces conditions: $\ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$.

Et ainsi: $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$.

La suite (b_n) est donc: **décroissante**.

6. Sur $]\,0\,; +\infty\,[$, $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et...

Pour répondre à cette question, nous allons calculer deux limites:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

• $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x}$

$= \dfrac{1}{0^+}$

$= +\infty$.

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$

$= +\infty$. (Croissances Comparées)

Ainsi: • la courbe $\mathscr{C}g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

• la courbe $\mathscr{C}g$ n'admet aucune asymptote horizontale en $+\infty$.

En conclusion la courbe $\mathscr{C}g$ admet: une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^2+1}$ et une primitive F est...

Ici: • $f(x) = xe^{x^2+1}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $F' = f$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $F'(x) = \frac{1}{2}(2xe^{x^2+1})$

$= xe^{x^2+1}$

$= f(x)$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$.