BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

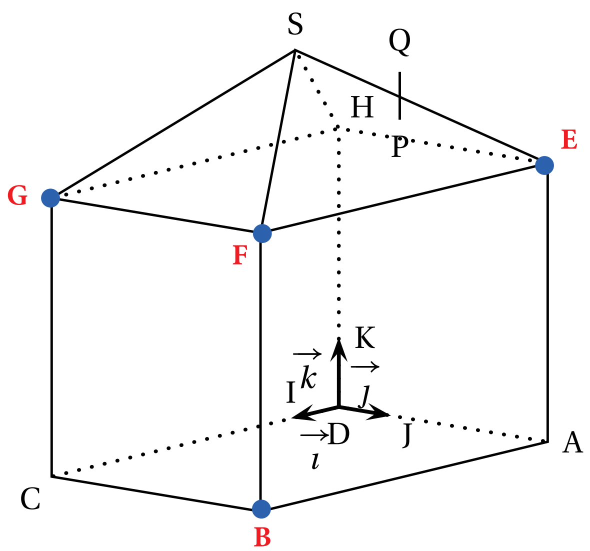
NOUVELLE CALÉDONIE
2022

LE TOIT & L'OISEAU

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points B, E, F et G:

Nous avons:



D'où les coordonnées des points B, E, F et G sont:

$$B\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} \text{ et } G\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}.$$

2. Montrons que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison:

Nous savons que: volume d'une pyramide $= \frac{1}{3} \times b \times h$.

(b = aire d'une base, h = hauteur à cette base)

Ici, la pyramide EFGHS a: • pour **hauteur** $h = 6 - 4$

• pour **base le rectangle** EFGH.

Or: $\mathcal{A}(EFGH) = b = DC \times DA = 6 \times 4 = 24$.

Dans ces conditions, le volume de la pyramide EFGHS est:

$$V_{EFGHS} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2.$$

Le volume de la pyramide EFGHS est donc égal à: 16 unités de volume.

Quant au volume de la maison, il est égal à: $V_{ABCDEFGH} + 16$.

Or: $V_{ABCDEFGH} = 6 \times 4 \times 4 = 96$ **unités de volume**.

En conclusion:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ V_{EFGHS} = 16 \\ \bullet\ V_{ABCDEFGH} = 112 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{EFGHS} = \frac{1}{7} V_{ABCDEFGH}.$$

3. a. Montrons que $\vec{n}\,(0\,;1\,;1)$ est normal au plan (EFS):

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ ont pour coordonnées:

$$\bullet\ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 4-4 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.   (S (3; 2; 6))

Nous avons: $x_{\overrightarrow{EF}} = 2 \times x_{\overrightarrow{ES}}$ et $y_{\overrightarrow{EF}} \neq 2 \times y_{\overrightarrow{ES}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.**

Les points E, F et S ne sont donc pas alignés et définissent le plan (EFS).

Le vecteur $\vec{n}$ (0; 1; 1) est normal au plan (EFS) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ du plan (EFS).

Or: $\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{ES} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ES} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = (0 \times 6) + (1 \times 0) + (1 \times 0) = 0$

• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ES} = (0 \times 3) + (1 \times (-2)) + (1 \times 2) = 0$.

Comme $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$: le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (EFS).

3. b. Déduisons-en qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$:

Le vecteur $\vec{n}$ **(0; 1; 1)** est un vecteur normal au plan **(EFS)**.

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A (x_A; y_A; z_A) et un vecteur normal $\vec{n}$ (a; b; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point E ∈ (EFS), avec $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$

$\iff 0 \times (x - 0) + 1 \times (y - 4) + 1 \times (z - 4) = 0$

cad $y + z - 8 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (EFS) est donc bien: $y + z - 8 = 0$.

4. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (PQ):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + t.c \end{cases}$$

Ici: • la droite (PQ) passe par le point Q (2 ; 3 ; 5,5)

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (PQ) est: $\vec{u} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (PQ) passant par le point Q et de vecteur directeur $\vec{k}$ (0 ; 0 ; 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \times t \\ y = 3 + 0 \times t \\ z = 5,5 + 1 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (PQ) est donc:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. b. Déduisons-en les coordonnées du point P:

Les coordonnées du point P vérifient le système:

$$\begin{cases} x_P = 2 & (1) \\ y_P = 3 & (2) \\ z_P = 5,5 + t & (3) \\ y_P + z_P - 8 = 0 & (4) \end{cases} . \quad (I)$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$(4) \iff y_P + z_P - 8 = 0 \iff 3 + 5,5 + t - 8 = 0$

$$\text{cad } t = -\frac{1}{2}.$$

Les coordonnées du point P sont donc:
- $x_P = 2$
- $y_P = 3$.
- $z_P = 5$

4. c. Déduisons-en la longueur de l'antenne:

La longueur de l'antenne est égale à:

$$PQ = \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2}$$

$$= 0,5.$$

5. a. Déterminons la position relative des droites (PQ) et Δ:

Les droites (PQ) et Δ sont sécantes en (2 ; 3 ; 6).

Pour le voir, il suffit de résoudre le système:

$$\begin{cases} (I) \\ \text{représentation paramétrique de } \Delta \end{cases}.$$

5. b. L'oiseau va-t-il percuter l'antenne ?

L'antenne est représentée par le segment [PQ].

L'oiseau ne va pas percuter l'antenne: il va passer 0, 5 unité au dessus de (PQ).

(le point commun aux 2 droites correspond à $t = 0,5$)