www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

NOUVELLE CALÉDONIE

2022

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2$$

CORRECTION

1. a. Montrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$:

Ici: • $f(x) = x \ln(x) - x - 2$ $\quad (U \times \ln(V) + W)$

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

D'après l'énoncé, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \left[(1) \times \ln(x) + \left(x \times \frac{1}{x} \right) \right] - 1$

$$\left(\left[U' \times \ln(V) + U \times \frac{V'}{V} \right] + W' \right)$$

$= [\ln(x) + 1] - 1$

$= \ln(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \ln(x)$.

1. b. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(e; f(e))$:

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A $(e ; f(e))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$.

Or ici: • $f(x) = x \ln(x) - x - 2$, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

• $f'(x) = \ln(x)$, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

• $f(e) = -2$,

• $f'(e) = 1$.

Dans ces conditions: $y = 1 \times (x - e) - 2$

cad: $y = x - e - 2$.

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A est donc: $y = x - e - 2$.

1. c. Justifions que la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$:

D'après le cours: • f est concave sur $]0 ; +\infty[$ ssi
$f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$

• f est convexe sur $]0 ; +\infty[$ ssi
$f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.

Or ici pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, f' est dérivable avec $f'(x) = \ln(x)$.

Dans ces conditions pour tout $x \in]0 ; +\infty[$: $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Ainsi: f est strictement convexe sur $]0 ; +\infty[$.

1. d. Déduisons-en la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T :

Comme f est strictement convexe sur $] 0 ; +\infty [$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Donc, en particulier : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T d'équation

$$y = x - e - 2.$$

2. a. Calculons la limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) - x - 2.$$

Or d'après le cours :

- $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ (Croissances Comparées)
- $\lim_{x \to 0^+} - x - 2 = -2.$

Dans ces conditions : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + (-2) = -2.$

2. b. Montrons que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire : $f(x) = x \times (\ln(x) - 1) - 2.$ $(x \neq 0)$

D'où : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \times (\ln(x) - 1) - 2.$

Or d'après le cours :

- $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} - 1 = - 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2.$

Dans ces conditions : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times (+\infty - 1) - 2 = +\infty.$

3. Dressons le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

- Étudions le signe de f' sur $]0; +\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1er cas : $f'(x) \leqslant 0.$

$f'(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant e^0$ cad $x \leqslant 1$ ou $x \in]0; 1]$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0.$

$f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant e^0$ cad $x \geqslant 1$ ou $x \in [1; +\infty[$.

Ainsi : • f est décroissante sur $]0; 1]$,

• f est croissante sur $[1; +\infty[$.

- Dressons son tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ a	↘	b	↗	c

Avec: • $a = -2$

• $b = f(1) = -3$ (minimum de f sur $]0; +\infty[$)

• $c = +\infty$.

4. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur $]1; +\infty[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(1) = -3 < 0$

et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$,

• f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]1; +\infty[$.

4. b. Justifions que le réel α appartient à $]4,3; 4,4[$:

Nous avons: • $f(4,3) \approx -0,028$

• $f(4,4) \approx 0,119$.

Ainsi: $\alpha \in]4,3; 4,4[$ car $f(4,3) < f(\alpha) f(4,4)$.

4. c. Déduisons-en le signe de f sur $]0; +\infty[$:

Le signe de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est donc:

- strictement négatif sur $]0; \alpha[$
- strictement positif sur $]\alpha; +\infty[$
- nul quand $x = \alpha$.

5. La valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil (0.01) ?

La valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil (0.01) est: 4, 32.

Ceci donne un encadrement de α au centième près: $4,31 < \alpha < 4,32$.