BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

MAYOTTE, RÉUNION

2022

$f(x) = e^{-x} + \ln(x)$

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons la limite de f en 0:

Ici: • $f(x) = e^{-x} + \ln(x)$ $\quad(e^u + \ln(V))$

• $\mathcal{D}f =]0; 1]$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} + \ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$

• $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + (-\infty) = -\infty$.

2. Déterminons la dérivée f' de f sur $]0; 1]$:

D'après l'énoncé f est dérivable sur $]0; 1]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; 1]$.

Pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,]$: $f'(x) = -\,e^{-x} + \dfrac{1}{x}$ $\left(U'\,e^{U} + \dfrac{V'}{V} \right)$

$$= \frac{-x\,e^{-x} + 1}{x}.$$

Ainsi, la dérivée f' de f sur $]\,0\,;\,1\,]$ est: $f'(x) = \dfrac{1 - x\,e^{-x}}{x}$.

3. a. Justifions que pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,]$, $x\,e^{-x} < 1$:

Nous savons que: $x \in]\,0\,;\,1\,]$.

Dans ces conditions: $0 < x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x < -0$

$$\iff e^{-1} \leqslant e^{-x} < e^{-0}$$

$$\iff \frac{1}{e} \leqslant e^{-x} < 1. \quad (1)$$

Comme $x \in]\,0\,;\,1\,]$, nous pouvons écrire:

$$(1) \iff x \times \left(\frac{1}{e}\right) \leqslant x \times e^{-x} < x \times (1)$$

$$\iff \frac{x}{e} \leqslant x\,e^{-x} < x \leqslant 1$$

$$\iff \frac{x}{e} \leqslant x\,e^{-x} < 1.$$

Donc pour tout réel $x \in]\,0\,;\,1\,]$, nous avons bien: $x\,e^{-x} < 1$.

3. b. Déduisons-en le tableau de variations de f sur $]\,0\,;\,1\,]$:

Le tableau de variations de f sur $]\,0\,;\,1\,]$ est:

x	0		1
f'	||	$+$	
f	|| a	$\nearrow$	b

car : • $1 - x e^{-x} > 0$

• $x \in]0 ; 1]$

Avec : • $a = -\infty$

• $b = f(1) = \dfrac{1}{e}$.

f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$ car $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1]$.

4. Montrons qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0 ; 1]$ tel que $f(\ell) = 0$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici : • f est continue sur $]0 ; 1]$,

• " $k = 0$ " est compris entre : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

et : $f(1) = \dfrac{1}{e} > 0$,

• f est strictement croissante sur $]0 ; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution ℓ appartenant à $]0 ; 1]$.

PARTIE B

1. a. Calculons a_1 et b_1:

Ici: • $a_0 = 0,1$ et $b_0 = 1$

• $\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

Dans ces conditions:

$$\begin{cases} a_1 = e^{-b_0} \\ b_1 = e^{-a_0} \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{e} \\ b_1 = \dfrac{1}{e^{0,1}} \end{cases}.$$

Ainsi: $a_1 = \dfrac{1}{e} \approx 0,37$ et $b_1 = \dfrac{1}{e^{0,1}} \approx 0,90$.

1. b. Recopions et complétons le cadre de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n):

Le tableau recopié et complété est le suivant:

```
def termes(n):
    a = 1/10
    b = 1
    for k in range(0, n):
        c = exp(-b)
        b = exp(-a)
        a = c
    return (a, b)
```


2. a Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$ ".

Initialisation: $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$?

Ici: $a_0 = 0,1$, $b_0 = 1$, $a_1 \approx 0,37$ et $b_1 \approx 0,90$.

Nous avons donc bien: $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$ et montrons qu'alors $0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$.

Supposons: $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'où: (1) $\Rightarrow$ $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$

$\Rightarrow$ $e^{-0} > e^{-an} \geqslant e^{-a_{n+1}} \geqslant e^{-b_{n+1}} \geqslant e^{-b_n} \geqslant e^{-1}$

(e^{-x} **est décroissante sur $\mathbb{R}$**)

$\Rightarrow$ $1 > b_{n+1} \geqslant b_{n+2} \geqslant a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{e}$

$\Rightarrow$ $0 < \dfrac{1}{e} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} < 1$

$\Rightarrow$ $0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.**

2. b Déduisons-en que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes:

• D'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Or ici: $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_n \leqslant a_{n+1} \\ a_n \leqslant 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (a_n) \text{ est majorée par } M = 1 \end{cases}$.

Donc: **la suite (a_n) est convergente.**

• D'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Or ici: $0 < b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1 \iff \begin{cases} b_{n+1} \leqslant b_n \\ b_n > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (b_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (b_n) \text{ est minorée par } m = 0 \end{cases}$

Donc: **la suite (b_n) est convergente.**

3. a. Montrons que $f(A) = 0$:

D'après l'énoncé: • $A = e^{-B}$ **avec** $A \in]0; 1]$,

• $B = e^{-A}$ **avec** $B \in]0; 1]$.

Dans ces conditions: $f(A) = e^{-A} + \ln(A)$

$= B + \ln(e^{-B})$

$= B - B$.

D'où: $f(A) = 0$.

3. b. Déterminons A - B:

Pour répondre à la question, nous allons calculer: $f(B)$.

$f(B) = e^{-B} + \ln(B)$

$= A + \ln(e^{-A})$

$= A - A$.

D'où: $f(B) = 0$.

D'après l'énoncé: • A est la limite de (a_n)

• B est la limite de (b_n)

Donc, nous pouvons écrire: • $f(A) = A$

• $f(B) = B$

Or: • $f(A) = 0$

• $f(B) = 0$, et donc $A = 0$ et $B = 0$.

Au total: $A - B = 0$.