www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU SUD 2022

EN VOIE DE DISPARITION

CORRECTION

1. Justifions que la suite (U_n) vérifie $U_{n+1} = 0,9\ U_n + 100$:

- D'après l'énoncé, au début de l'année 2020, la population étudiée compte **2 000 individus**.

D'où: $U_0 = 2\ 000$ **individus**.

- De plus, chaque année:

  - cette population **diminue de 10%**,
  - **et** on **réintroduit** dans la réserve **100 individus**.

Soient:

- U_{n+1}, l'effectif de la population au début de l'année " **2020 + (n + 1)** "
- U_n, l'effectif de la population au début de l'année " **2020 + (n)** ".

Pour tout entier naturel n, l'effectif de la population au début de l'année " **2020 + (n + 1)** " est égal à celui U_n **diminué de 10% et augmenté de 100 nouveaux individus**.

Pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = U_n - 10\% \times U_n + 100$

cad: $U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 100$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,9\, U_n + 100$.

2. Calculons U_1 et U_2:

Ici: • $U_{n+1} = 0,9\, U_n + 100$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 2\,000$ et $U_n \geqslant 0$.

Dans ces conditions:

• $U_1 = 0,9 \times U_0 + 100 = 0,9 \times 2\,000 + 100 = 1\,900$ individus

• $U_2 = 0,9 \times U_1 + 100 = 0,9 \times 1\,900 + 100 = 1\,910$ individus.

Ainsi: $U_1 = 1\,900$ individus et $U_2 = 1\,910$ individus.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n$ ".

Initialisation: $U_0 = 2\,000$ et $U_1 = 1\,900$.

Et: $1\,000 < 1\,900 \leqslant 2\,000$ cad $1\,000 < U_1 < U_0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n$ et montrons qu'alors $1\,000 < U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$.

Supposons: $1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: $(1) \Rightarrow 0,9 \times 1\,000 < 0,9 \times U_{n+1} \leqslant 0,9 \times U_n$

$\Rightarrow 900 + 100 < 0,9 \times U_{n+1} + 100 \leqslant 0,9 \times U_n + 100$

$\Rightarrow 1\,000 < 0,9 \times U_{n+1} + 100 \leqslant 0,9 \times U_n + 100$

$\Rightarrow 1\,000 < U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n$.

4. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$1\,000 < U_{n+1} \leqslant U_n \iff \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ U_n > 1\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 1\,000 \end{cases}.$$

Or, d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc ici: la suite (U_n) est bien convergente.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 0, 9:

$V_n = U_n - 1\,000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 1\,000$

$\iff V_{n+1} = (0,9\,U_n + 100) - 1\,000 \quad (1).$

Or: $U_n = V_n + 1\,000$.

D'où: $(1) \iff V_{n+1} = (0,9\,[\,V_n + 1000\,] + 100) - 1\,000$

$\iff V_{n+1} = 0,9 \times V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent: (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

5. b. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1\,000\,(1 + 0,9^n)$:

• Le premier terme V_0 de la suite (V_n) est: $V_0 = U_0 - 1\,000$

$= 1\,000.$

• Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire:

$V_{n+1} = 0,9 \times V_n$ ou $V_n = (0,9)^n \times V_0$ ou $V_n = (0,9)^n \times 1\,000.$

Comme $U_n = V_n + 1\,000$: $U_n = 1\,000 \times (0,9)^n + 1\,000$

$= 1\,000 \times (1 + 0,9^n).$

5. c. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1\,000 \times (0,9)^n + 1\,000$$

$$= 1\,000, \text{ car } 0,9 \in \,]\,0\,;\,1\,[.$$

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1\,000.$

6. a. Déterminons le plus petit entier n tel que $U_n \leqslant 1\,020$:

Pour répondre à la question, nous allons résoudre l'inéquation: $U_n \leqslant 1020.$

$U_n \leqslant 1\,020 \iff 1\,000 \times (1 + 0,9^n) \leqslant 1\,020$

$\iff 1 + 0,9^n \leqslant 1,02$

$\iff 0,9^n \leqslant 0,2$

$\iff n \times \ln(0,9) \leqslant \ln(0,2)$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)}, \text{ car } 0,9 \in]0;1[$$

cad $n \geq 15,275$ ou $n \geq 16$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ainsi, le plus petit entier n tel que $U_n \leq 1\,020$ est:

$n = 16$, car n est un entier naturel.

6. b. Complétons le programme Python:

Le programme Python complété afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S est:

```
def population(S) :
    n=0
    u=2000

    while u >1 020:
        u= 0.9*u+100
        n = n + 1
    return n
```