BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU SUD

2022

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons $g(1)$ et $g(e)$:

Ici: • $g(x) = 2(x-1) - x\ln(x)$ $\quad$ $(U + V \times \ln(W))$

• $\mathcal{D}g =]0;+\infty[$.

Dans ces conditions: • $g(1) = 0$

• $g(e) = 2(e-1) - e = e - 2$.

Ainsi: $g(1) = 0$ et $g(e) = e - 2$.

2. Déterminons la limite de la fonction g en " 0 ":

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 2(x-1) - x\ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to 0^+} 2(x-1) = -2$

• $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -2 - (0) = -2.$

3. a. Calculons g' pour tout $x \in]0; +\infty[$:

La fonction $g(x) = 2(x - 1) - x \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 2 - \left[(1) \times (\ln(x)) + (x) \times \left(\dfrac{1}{x} \right) \right]$

$$\left(U' + (V' \times \ln(W)) + V \times \frac{W'}{W} \right)$$

$$= 1 - \ln(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 1 - \ln(x).$

3. b. Déduisons-en le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$:

• Étudions le signe de g' sur $]0; +\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1er cas: $g'(x) \leqslant 0.$

$g'(x) \leqslant 0 \iff 1 - \ln(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff x \geqslant e$ cad $x \in [e; +\infty[.$

2e cas: $g'(x) \geqslant 0.$

$g'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e$ cad $x \in]0; e].$

Au total: • g est croissante sur $]0; e]$,

• g est décroissante sur $[\, e\, ; +\infty\, [$.

• **Dressons le tableau des variations de la fonction g sur $]\, 0\, ; +\infty\, [$:**

Le tableau des variations de la fonction g sur $]\, 0\, ; +\infty\, [$ est:

x	0		e		$+\infty$
g'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = -2$

• $b = g\,(e) = e - 2 \approx 0,718$ (maximum de g sur $]\, 0\, ; +\infty\, [$)

• $c = -\infty$.

4. **Montrons que $g\,(x) = 0$ admet deux solutions distinctes 1 et $\alpha \in [\, e\, ; +\infty\, [$:**

Nous savons que pour tout $x \in\,]\, 0\, ; +\infty\, [$: $g\,(x) = 2\,(x - 1) - x \ln\,(x)$.

• **" 1 " est bien solution de l'équation $g\,(x) = 0$.**

En effet: $g\,(1) = 0$ d'après la question 1.

• **Déterminons à présent la solution $\alpha \in [\, e\, ; +\infty\, [$ de l'équation $g\,(x) = 0$.**

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a\, ;\, b\,]$ ou $I =]\, a\, ;\, b\, [$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f\,(a)$ et $f\,(b)$, l'équation $f\,(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • g est continue sur $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$, donc sur $]\, e\, ;\, +\infty\, [$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} g\,(x) = -\infty < 0$

et: $g\,(e) = e - 2 > 0$,

• g est strictement décroissante sur $]\, e\, ;\, +\infty\, [$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g\,(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]\, e\, ;\, +\infty\, [$.

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons comme encadrement pour α:

$$4,92 < \alpha < 4,93.$$

5. **Déduisons-en le tableau de signes de g sur $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$:**

Le tableau de signes de g sur $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$ est:

x	0		1		α		$+\infty$
$g\,(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B

1. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = 3x - x \ln(x) - 2\ln(x) = 3x + (-x-2)\ln(x)$ ($U + V \times \ln(W)$)

• $\mathcal{D}f =]\,0\,; +\infty\,[$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x \times \left[3 - \ln(x) - \dfrac{2\ln(x)}{x} \right]$. ($x \neq 0$)

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times \left[3 - \ln(x) - 2\,\dfrac{\ln(x)}{x} \right]$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (Croissances Comparées).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times [\,3 - (+\infty) - 2 \times (+\infty)\,]$

$= (+\infty) \times (-\infty)$

$= -\infty$.

2. a. Justifions que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$:

La fonction $f(x) = 3x + (-x-2)\ln(x)$ est dérivable sur $]\,0\,; +\infty\,[$, comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]\,0\,; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in\,]\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 3 + \left[(-1) \times (\ln(x)) + (-x-2) \times \left(\frac{1}{x} \right) \right]$

$$\left(U' + (V' \times \ln(W)) + V \times \frac{W'}{W} \right)$$

$$= 3 - \ln(x) - \frac{(x+2)}{x}$$

$$= \frac{3x - x\ln(x) - x - 2}{x}$$

$$= \frac{2(x-1) - x\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{g(x)}{x}.$$

Donc, nous avons bien pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

2. b. Déduisons-en le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

Sachant que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est :

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$	‖	-	0	+	0	-	
f	‖ a	↘	b	↗	c	↘	d

Avec: • $a = -\infty$ (énoncé)

• $b = f(1) = 3$

• $c = f(\alpha) \approx 3,73$

• $d = -\infty$.

3. Étudions la convexité de f et précisons les coordonnées du point d'inflexion:

• **La convexité**:

D'après l'énoncé, pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$: $f''(x) = \dfrac{2 - x}{x^2}$.

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $]\,0\,; +\infty\,[$, **sachant que** $x^2 > 0$.

Le signe de f'' dépend donc du signe de $2 - x$:

• $2 - x \leqslant 0 \iff 2 \leqslant x$ cad ssi $x \in [\,2\,; +\infty\,[$,

• $2 - x \geqslant 0 \iff 2 \geqslant x$ cad ssi $x \in]\,0\,; 2\,]$.

Ainsi: • f est concave sur $[\,2\,; +\infty\,[$,

• f est convexe sur $]\,0\,; 2\,]$.

• **Le point d'inflexion**:

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, la fonction f'' s'annule et change de signe en: $x = 2$.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion: le point A d'abscisse $x = 2$ et d'ordonnée $y = f(2) = 6 - 4\ln(2)$.