www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD

2022

22F822

$$f(x) = \frac{e^x}{(1 + x^2)}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons les variations de la fonction p sur [-3 ; 4]:

- **Calculons p' :**

La fonction $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur [-3 ; 4].

Ainsi, nous pouvons calculer p' pour tout $x \in [-3 ; 4]$.

Pour tout $x \in [-3 ; 4]$: $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

Ainsi, pour tout $x \in [-3 ; 4]$: $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

- **Étudions le signe de p' sur [-3 ; 4]:**

Soit l'équation : $3x^2 - 6x + 5 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-6)^2 - 4(3 \times 5) = -24 < 0$.

Les solutions ?

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans $[-3 ; 4]$ et donc nous avons $p'(x) > 0$ car $a = 3 > 0$.

La fonction p est donc: strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. Justifions que l'équation $p(x) = 0$ admet sur $[-3 ; 4]$ une unique solution α:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- p est continue sur $[-3 ; 4]$
- " $k = 0$ " est compris entre: $f(-3) = -68 < 0$
  et: $f(4) = 37 > 0$
- p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $p(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[-3 ; 4]$.

3. Déterminons une valeur approchée du réel α au dixième près:

En ayant recours à la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,2$.

4. Donnons le tableau de signe de la fonction p sur $[-3 ; 4]$:

Le tableau de signe de la fonction **p** sur $[-3 ; 4]$ est:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1. a. Déterminons la dérivée de la fonction f sur $[-3; 4]$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ $\left(\dfrac{e^u}{V}\right)$

• $\mathcal{D}f = [-3; 4]$.

La fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $1 + x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $[-3; 4]$ et nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-3; 4]$.

Pour tout $x \in [-3; 4]$: $f'(x) = \dfrac{(1 \times e^x) \times (1 + x^2) - (e^x) \times (2x)}{(1+x^2)^2}$

$$\left(\frac{U'e^u \times V - e^u \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{e^x \times (1 + x^2 - 2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= e^x \times \left[\frac{(x-1)^2}{(1+x^2)^2}\right].$$

Ainsi, pour tout $x \in [-3; 4]$: $f'(x) = e^x \times \left[\frac{x-1}{1+x^2}\right]^2$.

1. b. Justifions que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en $x = 1$:

Pour cela, nous allons déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ cad A $(1; f(1))$.

L'équation de cette tangente est: $y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$

cad: $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$.

Or ici:
- $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, pour tout $x \in [-3; 4]$,
- $f'(x) = e^x \times \left[\frac{x-1}{1+x^2}\right]^2$, pour tout $x \in [-3; 4]$,
- $f(1) = \frac{e}{2}$,
- $f'(1) = 0$.

Dans ces conditions: $y = 0 \times (x - 1) + \frac{e}{2}$

cad: $y = \frac{e}{2}$.

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A est donc: $y = \frac{e}{2}$.

Comme cette équation est indépendante de x, nous pouvons affirmer qu'il s'agit bien d'une tangente horizontale.

2. a. Le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ?

D'après l'énoncé, le toboggan assure de bonnes sensations si son profil possède au moins deux points d'inflexion.

Ici, d'après les graphiques, nous pouvons dire que:

- f est convexe sur $[-3; 0]$
- f est concave sur $[0; 1]$
- f est convexe sur $[1; 4]$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc 2 points d'inflexion ($x = 0$ et $x = 1$), et par conséquent: oui le toboggan assure de bonnes sensations.

2. b. En utilisant f'', le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ?

Ici: • $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

• $\mathcal{D}f'' = [-3; 4]$.

Pour répondre à la question, nous allons dresser le tableau de signe de f'' sur l'intervalle $[-3; 4]$.

Préalablement notons que pour tout $x \in [-3; 4]$: • $e^x > 0$

• $(1+x^2)^3 > 0$.

Donc le signe de f'' dépend du signe de $p(x)(x-1)$.

Le tableau de signe de f'' est alors le suivant:

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction f'' s'annule et change de signe en: $x = \alpha$ et $x = 1$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet bien 2 points d'inflexions, et par conséquent: Oui le toboggan assure de bonnes sensations.