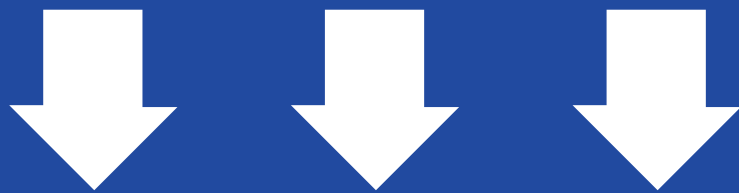


www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Suites Géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE...

6

CORRECTION

1. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique:

Nous savons que pour tout entier naturel n : • $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{3n}\right) \times U_n$

• $V_n = \frac{U_n}{n}$.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{3n}\right) U_n \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{(n+1)} = \frac{\left(\frac{n+1}{3n}\right) U_n}{(n+1)}$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{U_n}{3n}$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n.$$

Ainsi: la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = \frac{U_1}{1} = \frac{1}{3}$.

1. b. Donnons l'expression de V_n en fonction de n :

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme

$$V_1 = \frac{1}{3}; \quad V_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (V_n = V_1 \times q^{(n-1)})$$

1. c. Dédudions-en U_n pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geq 1: \quad V_n = \frac{U_n}{n} \Leftrightarrow U_n = n \times V_n.$$

$$\text{D'où: } U_n = \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} \quad \text{ou} \quad U_n = n \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Déterminons le sens de variation de la suite (U_n) :

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)} - n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{(n+1)}{3} - n\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{-2n+1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Comme $U_{n+1} - U_n < 0$ (car $n \geq 1$): la suite (U_n) est strictement décroissante sur \mathbb{N}^* .