T^LE Technologique Mathématiques

Suites Arithmétiques

MINI COURS

A. Définition d'une suite arithmétique :

Soit U_0 un nombre réel. Une suite (U_n) de premier terme U_0 est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé raison de la suite (U_n).

B. Propriétés des suites arithmétiques :

1. (U_n) est la suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r ssi pour tout entier naturel n : $U_n = U_0 + n\,r.$

2. Une suite (U_n) est arithmétique ssi pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n$ est indépendant de n : $U_{n+1} - U_n = c$, c étant une constante.

3. Soit une suite (U_n) arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p : $U_n - U_p = (n - p)\,r$ ou $U_n = U_p + (n - p)\,r.$

4. Soit une suite (U_n) arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n :

- $U_n = U_0 + n\,r$
- $U_n = U_1 + (n - 1)\,r$
- $U_n = U_2 + (n - 2)\,r$
- $U_n = U_3 + (n - 3)\,r$ etc . . .

C. Calcul de 1 + 2 + 3 + ... + n :

1. Formule :

Pour tout entier naturel n non nul : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

2. Application 1 :

Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r et de premier terme U_0, et n un entier naturel non nul : $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (n+1) \times \left[\dfrac{U_0 + U_n}{2}\right]$.

3. Application 2 :

Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p : $U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = \dfrac{(n - p + 1) \times (U_p + U_n)}{2}$.

D. Sens de variation d'une suite arithmétique :

Soit la suite arithmétique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r, nous avons :

$r > 0$	(U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$	Divergente
$r < 0$	(U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$	Divergente
$r = 0$	(U_n) est constante sur $\mathbb{N}$ $(U_n = c,\ c \in \mathbb{R})$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = c$	Convergente