T^{LE}
Technologique
Mathématiques

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PILE C'EST PAS FACE !

CORRECTION

1. Donnons la loi de la variable aléatoire discrète X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **lancer n fois une pièce de monnaie.**

Soient les événements **P** = " **Pile** apparaît à l'issue du lancer ", et
$\overline{P}$ = " **Face** apparaît à l'issue du lancer ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où " **Pile** " apparaît lors de ces n lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: **P** et $\overline{P}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de **P** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = n$ **et** $p = \frac{1}{2}$ (**il y a une chance sur deux d'obtenir Pile**).

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

2. Déterminons la probabilité d'obtenir k fois " Pile " lors des n lancers:

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Or ici: $p=\dfrac{1}{2}$.

D'où la probabilité d'obtenir k fois " Pile " lors des n lancers est:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-k)}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3. Calculons E (X) et V (X):

D'après le cours: • $E(X)=n \cdot p$

• $V(X)=n \cdot p \cdot (1-p)$.

Donc ici nous avons: • $E(X)=n \times \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{n}{2},$$

$$\bullet\ V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}.$$

4. Calculons $P(A)$ pour $n = 3$:

$$P(A) = P(\text{" obtenir 1 fois pile "})$$

$$= P(X = 1)$$

$$= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-1)}$$

$$= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$= \left(\frac{3!}{1!(3-1)!}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir 1 fois pile est égale à: $\frac{3}{8}$.

5. Calculons $P(B)$ pour $n = 3$:

$$P(B) = P(\text{" obtenir 2 fois pile "})$$

$$= P(X = 2) + P(X = 3), \quad \text{car: } n = 3$$

$$= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-3)}$$

$$= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$= \left(\frac{3\,!}{2\,!\,(3-2)\,!}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{4}{8}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins 2 fois pile est égale à: $\frac{1}{2}$.

6. Calculons P (C) pour $n = 7$:

$$P(C) = P(\text{" obtenir 3 fois pile "})$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} + \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{128}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{7\,!}{2\,!\,(7-2)\,!}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{7\,!}{3\,!\,(7-3)\,!}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right)$$

$$= \frac{8}{128} + \left(\frac{42}{2}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{210}{6}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir au plus 3 fois pile est égale à: $\frac{1}{2}$.