

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Forme Algébrique**



MINI COURS

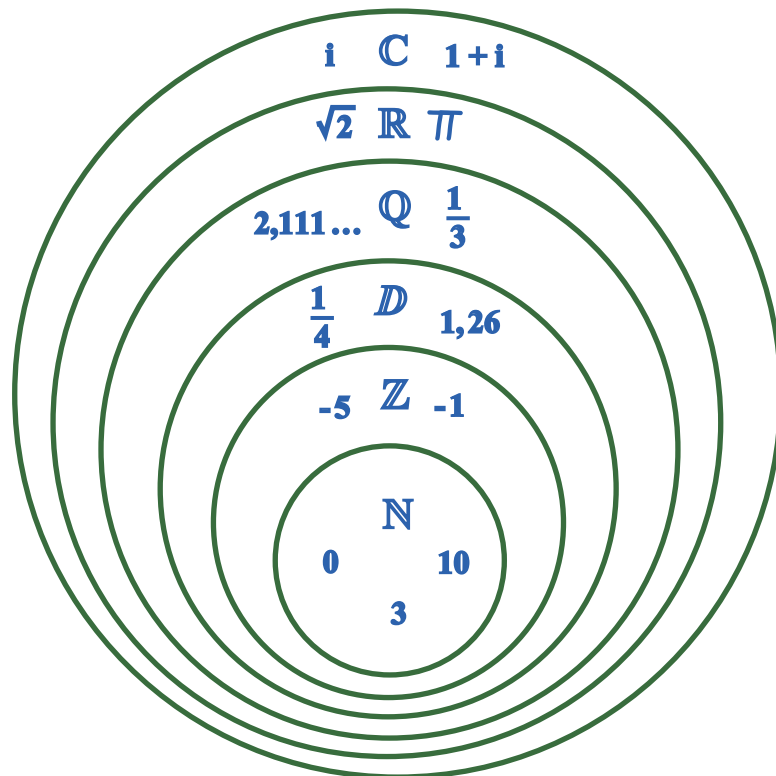
A. Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes :

1. L'ensemble \mathbb{C} :

Il existe un ensemble \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes, contenant \mathbb{R} et pour lequel :

- les règles de calcul restent les mêmes que dans \mathbb{R} ,
- il existe un nombre réel dans \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$,
- tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $z = x + i \cdot y$ (où x et y sont réels),
- le nombre 0 s'écrit $0 + i \cdot 0$.

2. Schéma :



B. Forme algébrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe z peut s'écrire **sous forme algébrique** :

$$z = x + i \cdot y, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

2. Propriétés :

- deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi :

$$x = x' \text{ et } y = y',$$

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z + z' = (x + x') + i(y + y')$,

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$,

$$(\text{car : } i^2 = -1)$$

- x se nomme **la partie réelle de z** et se note **Re (z)**,

- y se nomme **la partie imaginaire de z** et se note **Im (z)**.

C. Réel ou imaginaire pur ?

Soit $z = x + i \cdot y$, un nombre complexe :

- le nombre z est dit **réel** si $y = 0$
- le nombre z est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

D. Conjugué d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre **conjugué** noté \bar{z} avec : $\bar{z} = x - i \cdot y$.

2. Exemples :

- si $z = 2 + 3i$, alors : $\bar{z} = 2 - 3i$
- si $z = 2 + 4i$, alors : $\bar{z} = 2 - 4i$
- si $z = 3$, alors : $\bar{z} = 3$
- si $z = 7i$, alors : $\bar{z} = -7i$.

3. Relations :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.

4. Propriétés :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z)$

- z est un réel ssi $z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

E. Module d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit $z = x + iy$. Le module de z , noté $r = |z|$, est le réel positif ou nul :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Exemples :

- si $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i\sqrt{3}$: $|z| = 2$ cad $r = 2$.

3. Propriétés :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\alpha \cdot z| = \sqrt{\alpha^2} \cdot |z|$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}$.

F. Ensemble U des complexes de module 1 :

1. Définition :

U est l'ensemble des nombres complexes **de module égal à 1** :

$$U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

2. Exemples :

- $z = 1$.
- $z = i$.
- $z = -i$.
- $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.