

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercices de Synthèse**



MINI COURS

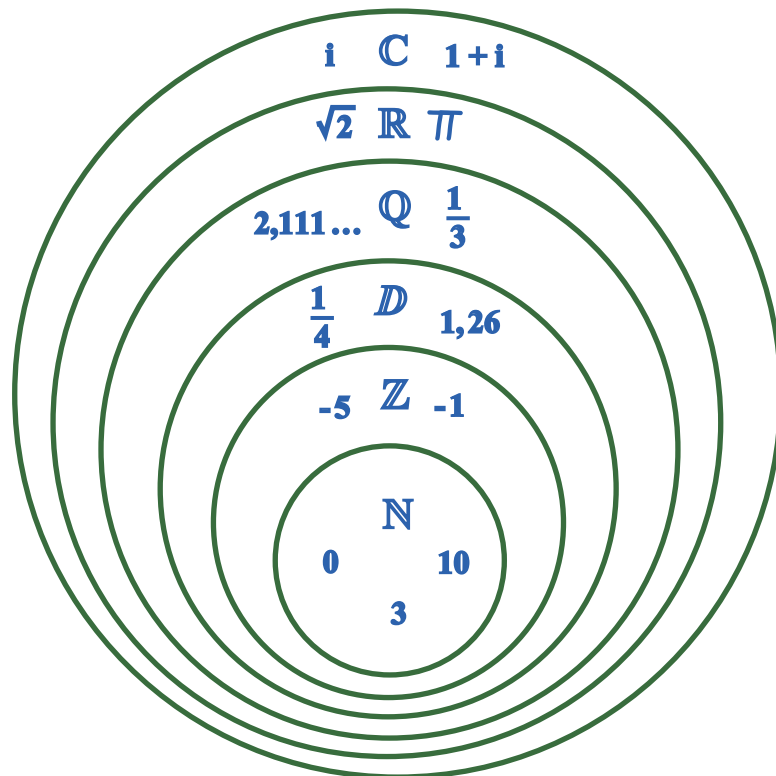
A. Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes :

1. L'ensemble \mathbb{C} :

Il existe un ensemble \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes, contenant \mathbb{R} et pour lequel :

- les règles de calcul restent les mêmes que dans \mathbb{R} ,
- il existe un nombre réel dans \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$,
- tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $z = x + i \cdot y$ (où x et y sont réels),
- le nombre 0 s'écrit $0 + i \cdot 0$.

2. Schéma :



B. Forme algébrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe z peut s'écrire **sous forme algébrique** :

$$z = x + i \cdot y, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

2. Propriétés :

- deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi :

$$x = x' \text{ et } y = y',$$

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z + z' = (x + x') + i(y + y')$,

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$,

$$(\text{car : } i^2 = -1)$$

- x se nomme **la partie réelle de z** et se note **Re (z)**,

- y se nomme **la partie imaginaire de z** et se note **Im (z)**.

C. Réel ou imaginaire pur ?

Soit $z = x + i \cdot y$, un nombre complexe :

- le nombre z est dit **réel** si $y = 0$
- le nombre z est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

D. Conjugué d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre **conjugué** noté \bar{z} avec : $\bar{z} = x - i \cdot y$.

2. Exemples :

- si $z = 2 + 3i$, alors : $\bar{z} = 2 - 3i$
- si $z = 2 + 4i$, alors : $\bar{z} = 2 - 4i$
- si $z = 3$, alors : $\bar{z} = 3$
- si $z = 7i$, alors : $\bar{z} = -7i$.

3. Relations :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.

4. Propriétés :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z)$

- z est un réel ssi $z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

E. Module d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit $z = x + iy$. Le module de z , noté $r = |z|$, est le réel positif ou nul :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Exemples :

- si $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$
- si $z = 1 - i\sqrt{3}$: $|z| = 2$ cad $r = 2$.

3. Propriétés :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\alpha \cdot z| = \sqrt{\alpha^2} \cdot |z|$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

F. Ensemble U des complexes de module 1 :

1. Définition :

U est l'ensemble des nombres complexes **de module égal à 1** :

$$U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

2. Exemples :

- $z = 1$.
- $z = i$.
- $z = -i$.
- $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

G. Affixe d'un point :

1. Définition :

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan par un point M de coordonnées $(x; y)$: **z est appelé affixe du point M .**

2. Remarque :

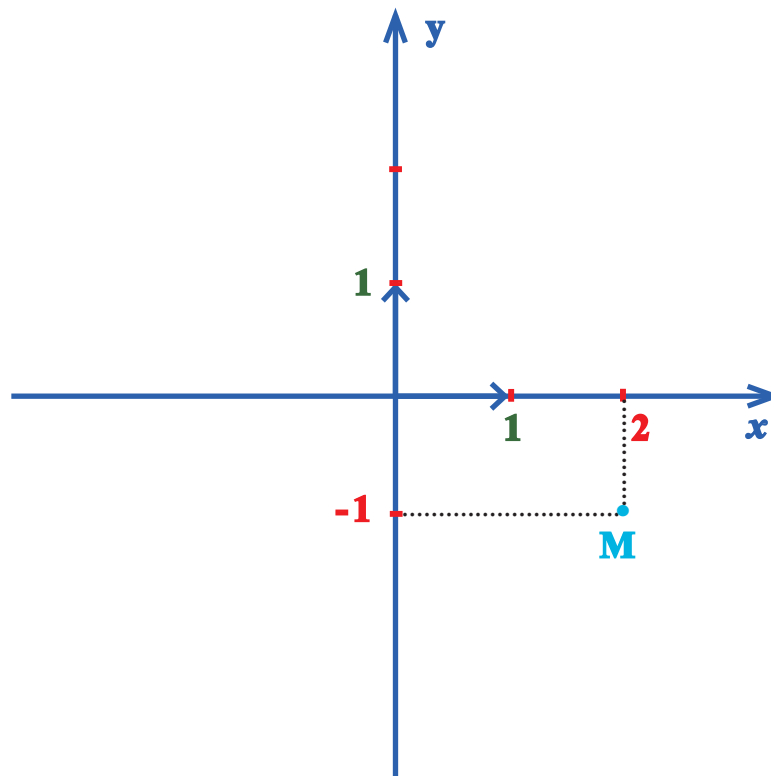
On dit que : **le point M est l'image de z.**

3. Exemple :

Soit $z = 2 - i$, un nombre complexe.

Nous pouvons dire alors : • z est l'affixe du point $M(2; -1)$

• $M(2; -1)$ est l'image de z .



H. Affixe d'un vecteur :

1. Définition :

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe le complexe: $z_B - z_A$.

2. Exemple :

Soit : • $z_A = 3 + 2i$, l'affixe du point A

• $z_B = 2 - 7i$, l'affixe du point B.

Dans ces conditions, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ -7 - 2 \end{pmatrix} \text{ cad } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

I. Propriétés :

1. Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

• Les points A et B sont confondus ssi: $z_A = z_B$.

• Le milieu du segment [AB] a pour affixe: $\frac{z_A + z_B}{2}$.

• La distance entre les points A et B est: $AB = |z_B - z_A|$.

2. Soient \overline{U} et \overline{V} deux vecteurs ayant pour affixe respectives z_u et z_v .

• Les vecteurs \overline{U} et \overline{V} sont égaux ssi: $z_u = z_v$.

• Le vecteur $\overline{U} + \overline{V}$ a pour affixe: $z_u + z_v$.

3. Les points M (z) et M' (\bar{z}) sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

J. Comment montrer...?

Soient quatre points $A (z_A)$, $B (z_B)$, $C (z_C)$ et $D (z_D)$.

1. Deux vecteurs parallèles ou colinéaires :

$$(AB) // (CD) \text{ ssi: } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

2. Trois points alignés :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés ssi: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

3. Deux vecteurs orthogonaux :

$$(AB) \perp (CD) \text{ ssi: } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur.}$$

4. Égalité entre deux longueurs :

$$\text{la longueur } [AB] = \text{la longueur } [AC] \text{ ssi: } |z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$

5. Triangle ABC isocèle en A :

Le triangle ABC est isocèle en A lorsque la longueur du côté $[AB]$ est égale à la longueur du côté $[AC]$ cad ssi: $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

6. Triangle ABC rectangle en A :

$$\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A \text{ ssi: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur.}$$

7. Triangle ABC équilatéral direct :

Le triangle **ABC** est un triangle équilatéral direct ssi :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

8. Quadrilatère **ABCD** = losange :

Le quadrilatère **ABCD** est un losange ssi :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $|\overrightarrow{z_B - z_A}| = |\overrightarrow{z_C - z_D}|$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff$
- $|\overrightarrow{z_D - z_A}| = |\overrightarrow{z_C - z_B}|$
- $(BD) \perp (CA)$
- $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur.

K. Arguments d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.

- Il existe des réels θ tels que:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases} .$$

- Les réels θ vérifiant ce système sont appelées **arguments de z** .

2. Coordonnées polaires :

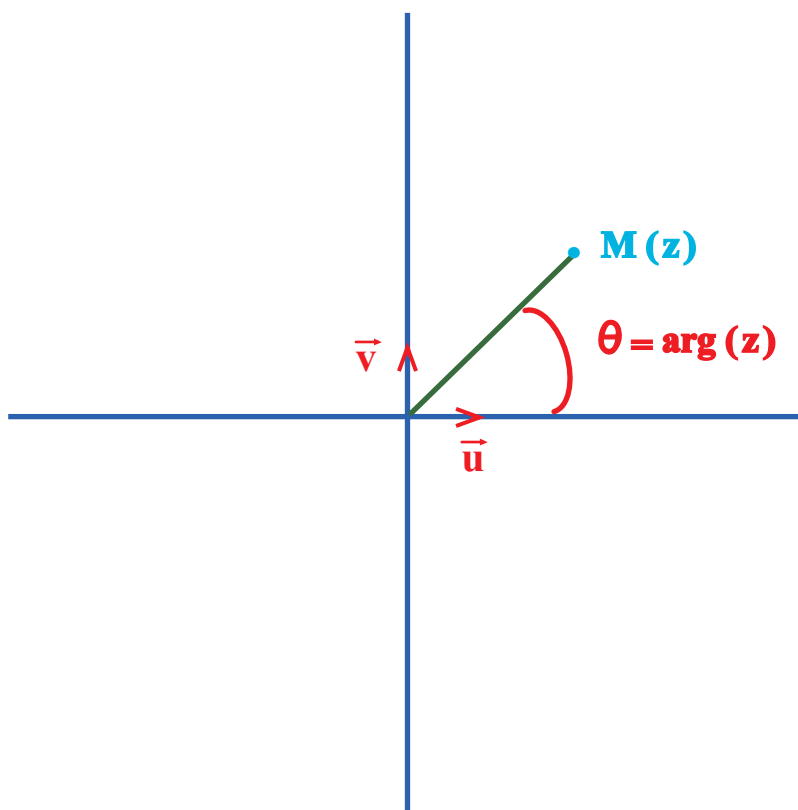
Soit un plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit un point $M (z = x + i y)$ distinct de O .

Les coordonnées polaires du point M s'écrivent: $(|z|; \arg(z))$.

3. Représentation graphique :

On se place dans un plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



4. Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) (2\pi)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi (2\pi)$
- $\arg(-\bar{z}) = -\arg(z) + \pi (2\pi)$
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 (\pi) \text{ (z est un réel)}$

$$\bullet z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ (} \pi \text{)} \quad (\mathbf{z \text{ est un imaginaire pur}})$$

5. Autres propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$\bullet \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \text{ (} 2\pi \text{)}$$

$$\bullet \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \text{ (} 2\pi \text{)}$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \text{ (} 2\pi \text{)}$$

$$\bullet \arg(z^n) = n \arg(z) \text{ (} 2\pi \text{)} \quad (\mathbf{avec: } n \in \mathbb{Z})$$

L. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul avec : $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \text{ (} 2\pi \text{)}$.

La forme trigonométrique de z s'écrit : $\mathbf{z = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))}$.

2. Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$z' = z \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) \text{ (} 2\pi \text{)} \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta \text{ (} 2\pi \text{)} \end{cases} .$$

M. Formules trigonométriques à connaître :

1. Formules d'addition :

Soient a et b deux réels.

- $\cos (a + b) = \cos (a) \cos (b) - \sin (a) \sin (b)$
- $\sin (a + b) = \sin (a) \cos (b) + \sin (b) \cos (a)$
- $\cos (a - b) = \cos (a) \cos (b) + \sin (a) \sin (b)$
- $\sin (a - b) = \sin (a) \cos (b) - \sin (b) \cos (a).$

2. Autres formules :

- $\cos (2a) = \cos^2 (a) - \sin^2 (a)$
- $\sin (2a) = 2 \sin (a) \cos (a)$
- $\cos (2a) = 2 \cos^2 (a) - 1$
- $\cos (2a) = 1 - 2 \sin^2 (a)$
- $\cos^2 (a) = \frac{1 + \cos (2a)}{2}$
- $\sin^2 (a) = \frac{1 - \cos (2a)}{2} .$

N. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1. Notation si $z = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$:

Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

2. Forme exponentielle de $z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$:

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument $\arg(z) = \theta [2\pi]$:

$$z = r e^{i\theta}.$$

O. Formules de Moivre et d'Euler :

1. Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$[r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

ou

$$[r \cdot e^{i\theta}]^n = r^n \cdot e^{in\theta}.$$

2. Formule d'Euler :

Pour tout réel θ :

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.