T[LE]

Technologique Mathématiques

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 7

CORRECTION

1. a. Donnons les formes exponentielle et trigonométrique de $1 + i$:

- Le module de $1 + i$ est: $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2}$ => $|1 + i| = \sqrt{2}$.

- Soit θ, l'argument de $1 + i$:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • Sous forme trigonométrique $1 + i$ s'écrit:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

• Sous forme exponentielle $1 + i$ s'écrit: $1 + i = \sqrt{2} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

1. b. Donnons les formes exponentielle et trigonométrique $1 - i$:

- Le module de $1 - i$ est: $|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2}$ => $|1 - i| = \sqrt{2}$.

- Soit θ, l'argument de $1 - i$:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • Sous forme trigonométrique $1 - i$ s'écrit:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

- Sous forme exponentielle $1 - i$ s'écrit: $1 - i = \sqrt{2} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

2. a. Déterminons la forme trigonométrique de S_n:

D'après Moivre, nous pouvons écrire:

- $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n \times \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right);$

- $(1 - i)^n = (\sqrt{2})^n \times \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right).$

Or: $\cos(-x) = x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

D'où: $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$

$$= (\sqrt{2})^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2 \times (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{ou:} \quad (\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Au total, la forme trigonométrique de S_n est: $S_n = (\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2. b. • **AFFIRMATION A**: **Vraie**.

En effet: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ est toujours un réel.

(S_n ne contient pas de " i ")

• **AFFIRMATION B**: **Vraie**.

En effet: à chaque fois que $\frac{n\pi}{4} = \frac{(2+4k)\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

et pour tout entier naturel k, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.