

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Donnons la forme exponentielle de $A = \left(\frac{3}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$:

- Le module de A est: $|A| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Soit θ , l'argument de A: $A = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

Par identification:
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{cad} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle A s'écrit: $A = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. a. Montrons que (r_n) est géométrique et déterminons r_0 et q :

Nous savons que: $r_n = |z_n|$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } r_{n+1} &= |z_{n+1}| \\ &= |A \cdot z_n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |A| |z_n| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} |z_n| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} r_n \quad (|z_n| = r_n).
 \end{aligned}$$

Au total, la suite (r_n) est géométrique:

de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = 1$.

2. b. Exprimons r_n en fonction de n , pour tout entier naturel n :

Comme $r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$, nous pouvons écrire:

$$r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \quad \text{cad} \quad r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

Au total, pour tout entier naturel n : $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

2. c. Que dire de la longueur OA_n lorsque $n \rightarrow +\infty$:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

$$= 0, \quad \text{car: } \frac{\sqrt{3}}{2} \in]0; 1[.$$

Au total: • comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, (r_n) est donc convergente,

- nous pouvons affirmer que la longueur OA_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. a. Démontrons que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} :

D'après Pythagore, le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} ssi:

$$(OA_{n+1})^2 + (A_n A_{n+1})^2 = (OA_n)^2.$$

Or ici: • $OA_n = |z_n| \Rightarrow OA_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$,

• $OA_{n+1} = |z_{n+1}| \Rightarrow OA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$,

• $A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \Rightarrow A_n A_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Au total, nous avons bien: $(OA_{n+1})^2 + (A_n A_{n+1})^2 = (OA_n)^2$

car: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n}$.

Et, par conséquent: le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .

3. b. Déterminons les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées:

A_n a pour affixe $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

- z_n est un point de l'axe des ordonnées ssi: $z_n = i \cdot y$, avec $y \neq 0$.

Sous forme exponentielle, z_n s'écrit alors: $z_n = y e^{i\frac{\pi}{2}}$.

- Or: $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Par identification:

$$\begin{cases} y = r_n \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{n\pi}{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = r_n \\ i\frac{\pi}{2} = i\frac{n\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_n = y \\ \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

($k\pi$ car: imaginaire pur)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} r_n = y \\ n = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} r_n = y \\ n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Au total, A_n est un point de l'axe des ordonnées ssi:

$$n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

3. c. Complétons la figure en représentant les points A_6 , A_7 , A_8 et A_9 :

