T^LE

Technologique Mathématiques

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POLYNÔME DE DEGRÉ 3

1

CORRECTION

1. Vérifions que " 8 " est solution de l'équation $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$:

" 8 " est solution de l'équation $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$ ssi:

$$(8)^3 - 12 \times (8)^2 + 48 \times (8) - 128 = 0.$$

Or: $(8)^3 - 12 \times (8)^2 + 48 \times (8) - 128 = 8 \times 64 - 12 \times 64 + 6 \times 64 - 128$

$= 2 \times 64 - 128$

$= 0.$

Ainsi: **" 8 " est bien une solution évidente de l'équation.**

2. Résolvons l'équation $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$ dans $\mathbb{C}$:

$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0 \iff (z - 8)(az^2 + bz + c) = 0.$

• **Déterminons a, b et c:**

$(z - 8)(az^2 + bz + c) = 0 \iff az^3 + bz^2 + cz - 8az^2 - 8bz - 8c = 0$

$\iff az^3 + (b - 8a)z^2 + (c - 8b)z - 8c = 0.$

Par identification avec l'équation d'origine, nous avons:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 8a = -12 \\ c - 8b = 48 \\ -8c = -128 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \\ c = 16 \end{cases}$$

Dans ces conditions: $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0 \iff (z - 8)(z^2 - 4z + 16) = 0.$

- **Déterminons les racines de l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$:**

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac.$

Ici: $a = 1$, $b = -4$ et $c = 16.$

D'où: $\Delta = -48.$

Or: $-48 = (4\sqrt{3}\,i)^2.$

D'où deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = \dfrac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{2}$ cad $z_1 = 2 - (2\sqrt{3})i,$
- $z_2 = \dfrac{4 + 4\sqrt{3}\,i}{2}$ cad $z_2 = 2 + (2\sqrt{3})i.$

Conclusion:

L'équation $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont:

- $z_1 = 2 - (2\sqrt{3})i,$
- $z_2 = 2 + (2\sqrt{3})i,$
- $z_3 = 8.$