T^LE

Technologique Mathématiques

Nombres Complexes Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ 2

CORRECTION

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(2-i)z + 3(1-2i) = 0$:

Soit l'équation: $z^2 - 2(2-i)z + 3(1-2i) = 0$ $(az^2 + bz + c = 0)$.

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1$, $b = -2(2-i)$ et $c = 3(1-2i)$.

D'où: $\Delta = 8i$.

Nous devons trouver un nombre complexe $\alpha = a + ib$ tel que: $\alpha^2 = \Delta$.

Nous avons: • $\alpha^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$,

• $\Delta = 8i$.

• D'où: $\alpha^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 8 \end{cases}$.

• De plus, comme $\alpha^2 = \Delta$: $|\alpha|^2 = |\Delta|$ cad $a^2 + b^2 = 8$.

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ ab = 4 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \quad (I). \\ ab > 0 \quad (i) \end{cases}$$

Du système (I), nous déduisons $2a^2 = 8$ cad $a^2 = 4$ cad $a = 2$ ou $a = -2$.

Dans ces conditions: $b = 2$ ou $b = -2$.

Notons que l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que a et b sont de même signe.

Ainsi: $\alpha' = -2 - 2i$ et $\alpha'' = 2 + 2i$.

Prenons α' (nous aurions pu prendre aussi α'').

Nous avons donc:
- $z_1 = \dfrac{-b - \alpha'}{2a}$
- $z_2 = \dfrac{-b + \alpha'}{2a}$.

En conclusion, les deux solutions sont:

- $z_1 = \dfrac{2(2-i) + 2 + 2i}{2}$
- $z_2 = \dfrac{2(2-i) - 2 - 2i}{2}$

cad

- $z_1 = 3$,
- $z_2 = 1 - 2i$.

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$:

Soit l'équation: $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$ $(az^2 + bz + c = 0)$.

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1, b = -(1 + i\sqrt{3})$ et $c = -1 + i\sqrt{3}$.

D'où: $\boldsymbol{\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}}$.

Nous devons trouver un nombre complexe $\boldsymbol{\alpha = a + ib}$ tel que: $\alpha^2 = \Delta$.

Nous avons: • $\alpha^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,(2ab)$,

• $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}$.

• D'où: $\alpha^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = -2\sqrt{3} \end{cases}$.

• De plus, comme $\alpha^2 = \Delta$: $|\alpha|^2 = |\Delta|$ **cad** $a^2 + b^2 = 4$.

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ 2ab = -2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab = -\sqrt{3}. \end{cases} \textbf{ cad } \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \quad (I). \\ ab < 0 \ (i) \end{cases}$$

Du système (I), nous déduisons $2a^2 = 6$ **cad** $a^2 = 3$ **cad** $\boldsymbol{a = \sqrt{3}}$ **ou** $\boldsymbol{a = -\sqrt{3}}$.

Dans ces conditions: $\boldsymbol{b = 1}$ **ou** $\boldsymbol{b = -1}$.

Notons que l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que a et b sont de signes opposés.

Ainsi: $\alpha' = \sqrt{3} - i$ et $\alpha'' = -\sqrt{3} + i$.

Prenons α' (nous aurions pu prendre aussi α'').

Nous avons donc: • $z_1 = \dfrac{-b - \alpha'}{2a}$

• $z_2 = \dfrac{-b + \alpha'}{2a}$.

En conclusion, les deux solutions sont:

• $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2}$

• $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2}$

cad

• $z_1 = \dfrac{(1 - \sqrt{3}) + i\,(\sqrt{3} + 1)}{2}$

• $z_2 = \dfrac{(1 + \sqrt{3}) + i\,(\sqrt{3} - 1)}{2}$.