T^LE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Limites « d'une fonction f »

MINI COURS

A. Limites infinie en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. Notations :

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Limites admises à connaître :

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si "n" impair} \\ +\infty & \text{si "n" pair} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

B. Limites finie en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. Notations :

Soit ℓ un réel, on note :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

2. Limites admises à connaître :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

3. Asymptote horizontale : ⚠

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$: la droite d'équation $y = \ell$.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$: la droite d'équation $y = \ell$.

C. Limites en un réel "a" :

1. Notations :

Soit "a" un réel, on note :

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$

2. Limite " à droite " et limite " à gauche " :

- **Limite " à droite " quand x tend vers "a" se note :**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

- **Limite " à gauche " quand x tend vers "a" se note :**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

3. Limites admises à connaître :

Pour tout n ∈ IN* :

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si "n" pair} \\ -\infty, & \text{si "n" impair} \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

4. Asymptote verticale :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (à gauche ou à droite), la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$.

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$\rightarrow \lim_{x \to 1^-} = -\infty$

$\rightarrow \lim_{x \to 1^+} = +\infty$

d'où : f admet une asymptote verticale d'équation : $x = 1$.

D. Limites somme, produit, quotient :

1. Somme de 2 limites :

Si $\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f + g) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

2. Produit de 2 limites :

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim (f \times g) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3. Quotient de 2 limites :

a. Cas où lim g $(x) \neq 0$:

Si lim f =	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et lim g =	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors lim $\left(\frac{f}{g}\right)$ =	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

b. Cas où lim g $(x) = 0$:

Si lim f =	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et lim g =	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors lim $\left(\frac{f}{g}\right)$ =	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

E. 4 formes indéterminées (FI) :

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- ∞ / ∞
- $0 / 0$.

F. Théorèmes à connaître :

1. Théorème 1 :

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[A ; +\infty[$:

- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$**

- **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.**

2. Théorème 2 des gendarmes :

Soient ℓ un réel et trois fonctions f, g et h avec :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ sur } [A ; +\infty[.$$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Ce théorème marche aussi quand x tend vers "$-\infty$" ou vers un réel "a".