

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-20; 20]$:

Ici: $f(x) = (-2x + 30) e^{0,2x-3}$, pour tout $x \in [-20; 20]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[-20; 20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-20; 20]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (-2) \times (e^{0,2x-3}) + (-2x + 30) \times (0,2 e^{0,2x-3}) \\ &= (-0,4x + 4) e^{0,2x-3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-0,4) \times (e^{0,2x-3}) + (-0,4x + 4) \times (0,2 e^{0,2x-3}) \\ &= (-0,08x + 0,4) e^{0,2x-3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-20; 20]$:

$$f'(x) = (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} \text{ et } f''(x) = (-0,08x + 0,4) e^{0,2x-3}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-20; 20]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 10 \quad (e^{0,2x-3} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 10 \quad (e^{-0,5x} > 0).$$

Ainsi: • f est croissante sur $[-20; 10]$,

• f est décroissante sur $[10; 20]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-20	10	20
f'	+	0	-
f	a	b	c

Avec: • $a = f(-20) \Rightarrow a = 70 e^{-7}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = 10 e^{-1}$,

• $c = f(20) \Rightarrow c = -10 e$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [-20; 20]$: $f''(x) = (-0,08x + 0,4) e^{0,2x-3}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $-0,08x + 0,4 \leq 0$ cad: $x \geq 5$,

• $f''(x) \geq 0$ ssi: $-0,08x + 0,4 \geq 0$ cad: $x \leq 5$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{0,2x-3} > 0$)

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [-20; 5]$,

• f est concave sur $I = [5; 20]$.