Tle Technologique Mathématiques

Fonction inverse
Dérivées & Variations

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RAPPEL 4

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$

  $(h \neq 0)$ est: $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$,

- f est dérivable en " a " ssi: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \ell$, ℓ **étant un nombre réel fini,**

- le nombre dérivé de f en " a " est: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau(h)$.

1. $f(x) = -2x^2 + 5$ et $a = 4$:

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = \mathbb{R}$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et a + h:

Ici: $a = 4 \in \mathbb{R}$ et $a + h = 4 + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$$= \frac{(-2\,(4+h)^2 + 5) - (-2 \times (4)^2 + 5)}{h}$$

$$= \frac{-2\,(16 + h^2 + 8h) + 32}{h}$$

$$= h + 8.$$

Ainsi, le taux de variation demandé est: $\tau(h) = h + 8.$

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} h + 8 = 8.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 8.$

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 4$ et précisons la valeur de $f'(4)$:

• Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 8$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 4$.

• La valeur de $f'(4)$ est: $f'(4) = 8.$

2. $f(x) = x^2 + 5x$ et $a = -2$:

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = \mathbb{R}.$

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et $a + h$:

Ici: $a = -2 \in \mathbb{R}$ et $a + h = -2 + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0).$

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$$= \frac{((-2+h)^2 + 5\,(-2+h)) - ((-2)^2 + 5 \times (-2))}{h}$$

$$= \frac{((4 + h^2 - 4h) - 10 + 5h) - (4 - 10)}{h}$$

$$= h + 1.$$

Ainsi, le taux de variation demandé est: $\mathcal{T}(h) = h + 1.$

c. Calculons la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \to 0} h + 1 = 1.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 1.$

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = -2$ et précisons la valeur de $f'(-2)$:

• Comme $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 1$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = -2$.

• La valeur de $f'(-2)$ est: $f'(-2) = 1.$

3. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $a = 2$:

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = \mathbb{R}.$

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et $a + h$:

Ici: $a = 2 \in \mathbb{R}$ et $a + h = 2 + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$= \frac{(3(2+h)^2 - 4(2+h)+1) - (3 \times (2)^2 - 4 \times (2) + 1)}{h}$$

$$= \frac{(3(4+h^2+4h) - 8 - 4h + 1) - (12 - 8 + 1)}{h}$$

$$= 3h + 8.$$

Ainsi, le taux de variation demandé est: $\mathcal{T}(h) = 3h + 8.$

c. Calculons la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \to 0} 3h + 8 = 8.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 8.$

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 2$ et précisons la valeur de $f'(2)$:

• Comme $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 8$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 2$.

• La valeur de $f'(2)$ est: $f'(2) = 8.$

4. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ et $a = \theta$ $(\theta \neq -1)$:

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = \mathbb{R} - \{-1\}.$

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et a + h:

Ici: $a = 0 \in Df$ et $a + h = 0 + h \in Df$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$= \dfrac{\left(\dfrac{2}{(0+h)+1}\right) - \left(\dfrac{2}{0+1}\right)}{h}$$

$$= \dfrac{\dfrac{2(0+1) - 2(0+h+1)}{(0+h+1)(0+1)}}{h}$$

$$= \dfrac{-2}{(0+h+1)(0+1)}.$$

Ainsi, le taux de variation demandé est: $\tau(h) = \dfrac{-2}{(0+h+1)(0+1)}$.

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-2}{(0+h+1)(0+1)} = \dfrac{-2}{(0+1)^2}.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{-2}{(0+1)^2}$.

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 0$ et précisons $f'(0)$:

- Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{-2}{(0+1)^2}$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 0$.

• La valeur de $f'(\theta)$ est : $f'(\theta) = \dfrac{-2}{(\theta + 1)^2}$.