

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Fonction inverse
Dérivées & Variations**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RAPPEL

3

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$

$$(h \neq 0) \text{ est: } \mathcal{T}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- f est dérivable en " a " ssi: $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = f'$, f' étant un nombre réel fini,
- le nombre dérivé de f en " a " est: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h)$.

1. $f(x) = -3x + 7$ et $a = 4$:

👉 Le taux d'accroissement ?

- Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = 4 \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = 4 + h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{• Dans ces conditions: } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \frac{(-3(4+h) + 7) - (-3 \times 4 + 7)}{h} \\ &= -\frac{3h}{h} \end{aligned}$$

$$= -3.$$

Ainsi: $\tilde{\tau}(h) = -3.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 4$?

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = -3$ (nombre réel fini): **oui f est dérivable en $a = 4$.**

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 4$?

Il est égal à: $f'(a = 4) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = -3.$

2. $f(x) = 1 - x^2$ et $a = 1$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = 1 + h \in \mathbb{R}$.

• Dans ces conditions: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \frac{(1 - (1+h)^2) - (1 - (1)^2)}{h}$$

$$= \frac{-(h^2 + 2h)}{h}$$

$$= -h - 2.$$

Ainsi: $\tilde{\tau}(h) = -h - 2.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 1$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2) = -2.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = -2$ (nombre réel fini): **oui f est dérivable en $a = 1$.**

👉 Le nombre dérivé de f en $a = 1$?

Il est égal à: $f'(a = 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = -2.$

3. $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ et $a = 0$:

👉 Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$, $a = 0 \in Df$ et $b = a + h = h \in Df$.

• Dans ces conditions: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3h+1}\right) - \left(\frac{1}{1}\right)}{h}$$

$$= \frac{-3h}{3h+1} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \frac{-3}{3h+1}.$$

Ainsi: $\tilde{\mathcal{T}}(h) = \frac{-3}{3h+1}.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 0$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{3h+1} = -3.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = -3$ (nombre réel fini): **oui f est dérivable en $a = 0$.**

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 0$?

Il est égal à: $f'(a=0) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = -3.$

4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $a = 2$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R} - \{1\}$, $a = 2 \in Df$ et $b = a + h = 2 + h \in Df$.

• Dans ces conditions: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1-(2+h)}\right) - \left(\frac{1}{1-2}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1-1-h}{-1-h}}{h}$$

$$= \frac{1}{1+h}.$$

Ainsi: $\tilde{\mathcal{C}}(h) = \frac{1}{1+h}$.

☞ f est-elle dérivable en $a = 2$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{C}}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+h} = 1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{C}}(h) = 1$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 2$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 2$?

Il est égal à: $f'(a=2) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{C}}(h) = 1.$

5. $f(x) = 7x + 2$ et $a = \sqrt{2}$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = \sqrt{2} + h \in \mathbb{R}$.

• Dans ces conditions:
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(\sqrt{2} + h) - f(\sqrt{2})}{h} \\ &= \frac{(7(\sqrt{2} + h) + 2) - (7\sqrt{2} + 2)}{h} \\ &= \frac{7h}{h} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ainsi: $\tilde{\mathcal{C}}(h) = 7.$

☞ f est-elle dérivable en $a = \sqrt{2}$?

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = 7$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = \sqrt{2}$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = \sqrt{2}$?

Il est égal à: $f'(a = \sqrt{2}) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = 7$.

6. $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$ et $a = 3$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R} - \{2\}$, $a = 3 \in Df$ et $b = a + h = 3 + h \in Df$.

• Dans ces conditions: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$$= \frac{\left(\frac{(3+h)+1}{2-(3+h)}\right) - \left(\frac{3+1}{2-3}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{4+h}{-1-h} + 4}{h}$$

$$= \frac{3}{1+h}$$

Ainsi: $\mathcal{T}(h) = \frac{3}{1+h}$.

☞ f est-elle dérivable en $a = 3$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{1+h} = 3.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = 3$ (nombre réel fini): **oui f est dérivable en $a = 3$.**

👉 Le nombre dérivé de f en $a = 3$?

Il est égal à: $f'(a=3) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{T}}(h) = 3.$