Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NATURE D'UNE SUITE, RÉCURRENCE

1

CORRECTION

1. Montrons que la suite (U_n) admet $m = 0$ comme minorant strict:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = 4 > 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \sqrt{1 + 2 \times 4} - 1 = 2 > 0$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$ et montrons qu'alors $U_{n+1} > 0$.

Supposons: $U_n > 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(I) $\Rightarrow 2U_n > 0$

$\Rightarrow 1 + 2U_n > 1$

$\Rightarrow \sqrt{1 + 2U_n} > \sqrt{1}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + 2U_n} - 1 > 1 - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0.$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

Ainsi: **la suite (U_n) est bien strictement minorée par $m = 0$.**

2. Prouvons que la suite (U_n) est strictement décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Pour cela, nous allons déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{1 + 2U_n} - 1 - (\sqrt{1 + 2U_{n-1}} - 1)$$

$$= \sqrt{1 + 2U_n} - \sqrt{1 + 2U_{n-1}}.$$

Dans ces conditions, la suite (U_n) est strictement décroissante ssi:

$U_{n+1} - U_n < 0$ **cad** $\sqrt{1 + 2U_n} - \sqrt{1 + 2U_{n-1}} < 0.$

$\sqrt{1 + 2U_n} - \sqrt{1 + 2U_{n-1}} < 0 \iff \sqrt{1 + 2U_n} < \sqrt{1 + 2U_{n-1}}$

$\iff 1 + 2U_n < 1 + 2U_{n-1}$

$\iff 2U_n < 2U_{n-1}$

$\iff U_n - U_{n-1} < 0.$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$ qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$ . . . qui dépend du signe de $U_1 - U_0$.

Or: $U_1 - U_0 = 2 - 4 = -2 < 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Déduisons-en la nature de (U_n):

D'après le cours, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est strictement minorée par $m = 0$

• (U_n) est **strictement décroissante**.

Donc: **OUI, la suite (U_n) est convergente.**

Elle admet pour limite ℓ telle que: $\ell = \sqrt{1 + 2\ell} - 1$.

$\ell = \sqrt{1 + 2\ell} - 1 \iff \ell^2 = 0$ cad: $\ell = 0$.

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 0$.