Spé Maths
Terminale

Limite d'une Suite

MINI COURS

A. Variations et limites d'une suite arithmétique :

Soit la suite arithmétique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r, nous avons:

$r > 0$	(U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$	Divergente
$r < 0$	(U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$	Divergente
$r = 0$	(U_n) est constante sur $\mathbb{N}$ $(U_n = c,\ c \in \mathbb{R})$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = c$	Convergente

B. Variations et limites d'une suite géométrique :

Soit la suite géométrique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme U_0 et de raison q, distinguons deux cas :

1er cas : Si $U_0 > 0$.

$q = 0$	(U_n) est constante sur $\mathbb{N}$ (à partir du rang 1)	Convergente
$q \in]\,0, 1\,[$	(U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$	Convergente
$q = 1$	(U_n) est constante sur $\mathbb{N}$	Convergente

$q > 1$	(U_n) est croissante sur $I\!N$	Divergente
$q \in]-1, 0[$	(U_n) est une suite alternée sur $I\!N$ (ni croissante, ni décroissante)	Convergente
$q \leq -1$	(U_n) est une suite alternée sur $I\!N$ (ni croissante, ni décroissante)	La limite n'existe pas

******

2e cas : Si $U_0 < 0$.

$q = 0$	(U_n) est constante sur $I\!N$ (à partir du rang 1)	Convergente
$q \in]0, 1[$	(U_n) est croissante sur $I\!N$	Convergente
$q = 1$	(U_n) est constante sur $I\!N$	Convergente
$q > 1$	(U_n) est décroissante sur $I\!N$	Divergente
$q \in]-1, 0[$	(U_n) est une suite alternée sur $I\!N$ (ni croissante, ni décroissante)	Convergente
$q \leq -1$	(U_n) est une suite alternée sur $I\!N$ (ni croissante, ni décroissante)	La limite n'existe pas

C. Limites infinies en $+\infty$:

1. Notations :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

2. Limites admises à connaître :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$.

3. Divergente ?

La suite (U_n) est divergente quand:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = -\infty$

ou

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = +\infty$.

D. Limites finies en $+\infty$:

1. Notation :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell.$

2. Limites admises à connaître :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^p}{e^n} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*).$

3. Convergente ?

La suite (U_n) est convergente quand:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$, ℓ étant un nombre fini.

E. Propriété importante:

La limite d'une suite (U_n) est unique.

F. Théorèmes à connaître :

1. Limite infinie :

Soit A un entier naturel.

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que, pour tout $n \geq A$: $U_n \leq V_n$.

- **Si** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, **alors:** $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$
- **Si** $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$, **alors:** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

2. Limite finie = Théorème des gendarmes :

Soit: • **A un entier naturel**

• ℓ **un réel.**

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites telles que, pour tout $n \geq A$:

$$U_n \leq V_n \leq W_n.$$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ **et** $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \ell$, **alors:** $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell$.

G. Limites somme, produit, quotient :

1. Somme de 2 limites :

Si lim U_n =	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et lim V_n =	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors lim ($U_n + V_n$) =	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

2. Produit de 2 limites :

Si lim U_n =	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et lim V_n =	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors lim (U_n x V_n) =	ℓ x ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3. Quotient de 2 limites :

a. Cas où lim $V_n \neq 0$:

Si lim U_n =	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et lim V_n =	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors lim $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ =	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

b. Cas où $\lim V_n = 0$:

Si $\lim U_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim V_n =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\lim \left(\frac{U_n}{V_n}\right) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

H. 4 formes indéterminées (FI) :

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- ∞ / ∞
- $0 / 0$.