BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE

2023

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES V V F V F

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer f' et f'' sur $\mathbb{R}$.

Or la fonction $f(x) = e^x - x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = e^x - 1$.
- $f''(x) = e^x$.

Donc ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or, d'après le cours:

- f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Ainsi: **f est convexe sur $\mathbb{R}$.**

2. $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$?

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre sur IR, l'équation:

$$(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$$

$(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0 \iff 2e^x - 6 = 0$ car $e^x + 2 > 0$

$\iff e^x = 3$

cad $x = \ln(3)$.

Ainsi: $x = \ln(3)$ est l'unique solution de l'équation.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$?

Il s'agit ici de calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x}$.

En $+\infty$: $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \dfrac{e^x\left(e^2 - \dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)}$.

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^2 - \dfrac{1}{e^x}}{1 - \dfrac{x}{e^x}}$.

Or d'après le cours:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{e^x} = 0$ (Croissance Comparées).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \dfrac{e^2 - 0}{1 - 0} = e^2.$

4. F est la primitive de f sur IR avec F (0) = 5 ?

Ici: • $f(x) = (6x + 5)\, e^{3x}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}.$

• f est définie et continue sur IR.

Elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR telle que: $F' = f.$

Une primitive de f sur IR est: $F(x) = (2x + 1)\, e^{3x}.$

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien:

$$F'(x) = (2) \times (e^{3x}) + (2x + 1) \times (3 \times e^{3x})$$

$$= (6x + 5)\, e^{3x}$$

$$= f(x).$$

• Or d'après le cours, toutes les primitives de f sur IR sont de la forme:

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Ici, nous avons donc: $G(x) = (6x + 5)\, e^{3x} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Or $G(0) = 5.$

$G(0) = 5 \iff (2 \times 0 + 1)\, e^0 + c = 5$ cad $c = 4.$

Au total, la primitive F de f sur IR telle que $F(0) = 5$ est:

$$F(x) = (2x + 1)\, e^{3x} + 4.$$

5. L'exécution de *mystere ([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])* renvoie 50 ?

L'exécution donne: $\dfrac{50}{10} = 5.$