www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

2023

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES a c b d b

1. ABC est un triangle...

Les points A, B et C ont pour coordonnées: $A\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$.

Dans ces conditions:

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\\z_C - z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\\z_C - z_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$.

Et:

- $AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$

- $AC = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = 6$

- $BC = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

Nous savons que:

Freemaths : Tous droits réservés

- le triangle ABC est isocèle en A **ssi ses deux côtés AB et AC sont de même longueur cad ssi $AB = AC$,**
- le triangle ABC est rectangle en A ssi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Or ici:
- $AB = AC = \sqrt{6}$, donc triangle isocèle en A
- $BC^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ et $AB^2 + AC^2 = 36 + 36 = 72$, donc triangle rectangle en A.

Ainsi le triangle ABC est: isocèle rectangle en A.

2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est...

Les points B, C et D ont pour coordonnées: $B\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}8\\-3\\-8\end{pmatrix}$.

Les points B, C et D ne sont pas alignés; ils définissent donc bien le plan (BCD).

Une équation cartésienne du plan (BCD) est: $4x + y + z - 21 = 0$.

En effet, les points B, C et D vérifient bien cette équation cartésienne:

- B vérifie bien " $4x + y + z - 21 = 0$ " car $4 \times 3 + 6 + 3 - 21 = 0$
- C vérifie bien " $4x + y + z - 21 = 0$ " car $4 \times 3 + 0 + 9 - 21 = 0$
- D vérifie bien " $4x + y + z - 21 = 0$ " car $4 \times 8 + (-3) + (-8) - 21 = 0$.

Comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés, une équation cartésienne du plan (BCD) est: $4x + y + z - 21 = 0$.

3. Le point H a pour coordonnées...

Freemaths : Tous droits réservés

Le plan (ABC) a pour équation cartésienne: $x - 2y - 2z + 15 = 0$.

H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Étape 1: détermination d'une représentation paramétrique de la droite (d).

Un vecteur normal au plan (ABC) est: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Soit (d) la droite perpendiculaire au plan (ABC) qui passe par le point D.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A ($x_A ; y_A ; z_A$) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a; b; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in IR.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D (8; -3; - 8) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1; -2; -2) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 8 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -8 - 2t \end{cases} , t \in IR.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Étape 2: détermination des coordonnées du point H.

Le point H est le point d'intersection entre la droite **(d)** et le plan (ABC).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = 8 + t \quad (1) \\ y_H = -3 - 2t \quad (2) \\ z_H = -8 - 2t \quad (3) \\ x_H - 2y_H - 2z_H + 15 = 0 \quad (4) \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \iff x_H - 2y_H - 2z_H + 15 = 0 \iff (8+t) - 2(-3-2t) - 2(-8-2t) + 15 = 0$$

$$\iff 8 + t + 6 + 4t + 16 + 4t + 15 = 0$$

$$\iff 9t = -45$$

cad $t = -5$.

Les coordonnées du point H sont donc:

- $x_H = 8 - 5 = 3$
- $y_H = -3 + 10 = 7.$
- $z_H = -8 + 10 = 2$

4. Les droites (BC) et Δ...

Nous savons que: $B\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Un vecteur directeur de la droite (BC) est: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Via l'équation paramétrique de la droite Δ, nous pouvons affirmer qu'un

vecteur directeur de Δ est: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Or: $x_{\overrightarrow{BC}} = 0 \times x_{\vec{w}}$ et $y_{\overrightarrow{BC}} \neq 0 \times y_{\vec{w}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{w}$ ne sont donc pas proportionnels **et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires**.

Les droites (BC) et Δ sont donc non coplanaires.

Notons que: • **(BC) et Δ ne sont donc pas confondues**

• **(BC) et Δ ne sont donc pas strictement parallèles.**

(BC) et Δ sont-elles sécantes ?

Une représentation paramétrique de la droite Δ est:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (BC) passant par le point B (3 ; 6 ; 3) et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ (0 ; - 6 ; 6) est:

Freemaths : Tous droits réservés

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 6t' \\ z = 3 + 6t' \end{cases}, t \in IR.$$

Résoudre le système: $\begin{cases} 5 + t = 3 \\ 3 - t = 6 - 6t' \\ -1 + 3t = 3 + 6t' \end{cases}$ n'aboutirait sur aucune solution.

Donc aucun point d'intersection entre (BC) et Δ.

(BC) et Δ ne sont donc pas sécantes.

5. Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont...

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre le système:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \quad (1) \\ x - 2y - 2z = -15 \quad (2) \end{cases}.$$

En additionnant membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons:

$$(1) + (2) \iff \{3x - 3y = -9 \iff \{x - y = -3. \quad (3)$$

Quels points parmi A, B et C vérifient l'équation (3) ?

• $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vérifie (3) car: $-1 - 2 = -3$,

Freemaths : Tous droits réservés

• $B\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie **(3)** car: $3 - 6 = -3$,

• $C\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas **(3)** car: $8 - (-3) = 11 \neq -3$.

Donc la droite (AB) correspond à l'intersection entre $\mathcal{P}$ et (ABC).

Freemaths : Tous droits réservés