BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 1
2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES C D C B C A

1. Sur IR, $f(x) = \frac{x}{e^x}$ et sa dérivée f' est égale à...

Ici: • $f(x) = \frac{x}{e^x}$ $\left(\frac{U}{V}\right)$

• $\mathcal{D}f = IR$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur IR comme quotient de deux fonctions dérivables sur IR, avec: **pour tout $x \in IR$, $e^x \neq 0$.**

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = \frac{(1) \times (e^x) - (x) \times (e^x)}{(e^x)^2}$ $\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$

$$= \frac{1 - x}{e^x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = \frac{1 - x}{e^x}$ ou $f'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$.

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3 ; 1]$, la fonction...

Nous sommes en présence de la représentation graphique de la courbe de la dérivée seconde de f sur $[-3 ; 1]$.

Au vu du graphique, nous pouvons dire que:

- f'' est positive sur [-3 ; -1], donc f' est croissante sur [-3 ; -1],
- f'' s'annule en (-1 ; 0),
- f'' est négative sur [-1 ; 1], donc f' est décroissante sur [-1 ; 1].

Dans ces conditions, il est clair que: **la fonction f' admet un maximum en $x = -1$.**

3. Sur IR, $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ et $F(x) = \dots$

Ici:
- $f(x) = x^3 e^{-x^2}$
- $\mathcal{D}f = IR$.

f est définie et continue sur IR.

Elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR telle que: $F' = f$.

Une primitive de f sur IR est: $F(x) = \frac{-1}{2}(x^2 + 1)\, e^{-x^2}$.

En effet pour tout $x \in IR$, nous avons bien:

$$F'(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)(2x) \times (e^{-x^2}) + \left(\frac{-1}{2}\right)(x^2 + 1) \times (-2x\, e^{-x^2})$$

$$= -x e^{-x^2} + (x^2 + 1)\, x\, e^{-x^2}$$

$$= x^3 e^{-x^2}$$

$$= f(x).$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc: $F(x) = \frac{-1}{2}(x^2 + 1)\,e^{-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \ldots$

Ici: • $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \dfrac{e^x \times \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \times \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$ $\quad (x \neq 0)$

$$= \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$.

5. Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x+1}$, et la primitive F de f telle que $F(0) = 1$ est...

Ici: • $f(x) = e^{2x+1}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

• f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $F' = f$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est: $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \times 2 \times (e^{2x+1})$$

$$= e^{2x+1}$$

$$= f(x).$$

• D'après le cours, toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme:

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Ici, nous avons donc: $G(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Or: $G(0) = 1$.

$G(0) = 1 \iff \frac{1}{2} e + c = 1$ cad $c = 1 - \frac{1}{2} e$.

Au total, la seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de f telle que $F(0) = 1$ est:

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + \left(1 - \frac{1}{2} e\right) \text{ cad } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{2} e + 1.$$

6. La représentation graphique de f'' sur $[-2\,;\,4]$ est...

La bonne représentation graphique de f'' est : celle de a.