BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES C C A A A B

1. Pour tout $x \in IR$, $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et l'équation $f(x) = 2022$ admet ...

Ici: • $f(x) = \ln(1 + x^2)$

• $\mathcal{D}f = IR$.

Dans ces conditions: $f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022$

$\iff 1 + x^2 = e^{2022}$

$\iff x^2 = e^{2022} - 1$

cad $x = \sqrt{e^{2022} - 1}$ ou $x = -\sqrt{e^{2022} - 1}$.

Ainsi l'équation $f(x) = 2022$ admet: **exactement deux solutions sur IR.**

2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) = x\ln(x) - x^2$ et la fonction g admet ...

Ici: • $g(x) = x\ln(x) - x^2$

• $\mathcal{D}g =]0; +\infty[$.

D'après le cours, si g'' s'annule et change de signe en a alors $\mathcal{C}g$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

La fonction $g(x) = x\ln(x) - x^2$ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' et g'' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: • $g'(x) = (1 \times \ln(x)) + \left(x \times \frac{1}{x}\right) - 2x$

$$= \ln(x) - 2x + 1.$$

• $g''(x) = \frac{1}{x} - 2.$

Dans ces conditions, la fonction g'' s'annule et change de signe quand:

$$\frac{1}{x} - 2 = 0 \quad \text{cad} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Au total, sur $]0;+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_g$ admet: exactement un point d'inflexion $A\left(\frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

3. Sur $]-1;1[$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ et " g " est une primitive de f avec...

Ici: • $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

• $\mathcal{D}f =]-1;1[$.

f est définie et continue sur $]-1;1[$.

Elle admet donc une primitive sur $]-1;1[$ cad une fonction " g " dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ telle que: $g' = f$.

Une primitive de f sur $]-1\,;\,1[$ est: $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

En effet, pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, nous avons bien:

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \times \left[\frac{-2x}{1-x^2}\right]$$

$$= \frac{x}{1-x^2}$$

$$= f(x).$$

Donc une primitive " g " de f sur $]-1\,;\,1[$ est: $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

4. La fonction $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur ...

Ici: • $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$

• $\mathcal{D}f = ?$

La fonction f est définie à partir du moment où: $-x^2 - x + 6 > 0$.

Soit l'équation: $-x^2 - x + 6 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times (-1) \times (6)$

$= 25 > 0$.

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

- $x_1 = \dfrac{1 - 5}{-2} = 2$

- $x_2 = \dfrac{1 + 5}{-2} = -3.$

Ainsi: $-x^2 - x + 6 > 0$ ssi $x \in \,]-3\,;\,2\,[\, = \mathcal{D}f.$

Au total, la fonction $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur: $]-3\,;\,2\,[.$

5. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point d'abscisse " 1 " est...

Ici: • $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$

• $\mathcal{D}f = \,]\,0,5\,;\,+\infty\,[.$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A $(1\,;\,f(1))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1).$

Or ici: • $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1),$

• $f'(x) = 2x - 4 + \dfrac{6}{2x - 1},$

• $f(1) = -3,$

• $f'(1) = 4.$

Dans ces conditions: $y = 4 \times (x - 1) + (-3)$

cad: $y = 4x - 7.$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A $(1\,;\,-3)$ est: $y = 4x - 7.$

6. L'ensemble des solutions dans $]-1\,;+\infty[$ de $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est...

Dans IR: $\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \iff \ln(x+3) < \ln(x+1)^2$

$\iff x+3 < (x+1)^2$

$\iff x^2 + x - 2 > 0.$

Soit l'équation: $x^2 + x - 2 = 0.$ $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4 \times (1) \times (-2)$

$= 9 > 0.$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

- $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$
- $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1.$

Ainsi: $x^2 + x - 2 > 0$ ssi $x \in\,]-\infty\,;-2[\, \cup\,]1\,;+\infty[.$

Or nous sommes dans $]-1\,;+\infty[$, l'ensemble solution recherché est donc:

$]1\,;+\infty[.$