# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 1

## CORRIGÉ EXERCICE 2

## MAYOTTE, RÉUNION
## 2022

# Questionnaire à Choix Multiple

**RÉPONSES** C D B C B D B

**1. Le volume d'eau devient inférieur à un quart de litre au bout de...**

Ici:
- le volume d'eau diminue de **15% chaque heure,**
- initialement, le récipient contient **1 litre d'eau**.

Nous pouvons donc écrire:
- $U_n = (1 - 15\,\%)^n \times U_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$.

Déterminer au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau, devient inférieur à un quart de litre, revient à résoudre l'inéquation $U_n < 0,25$.

$U_n < 0,25 \iff (1 - 15\,\%)^n \times U_0 < 0,25$

$\iff (0,85)^n < 0,25$

$\iff n \ln(0,85) < \ln(0,25)$

$\iff n > \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,85)}$ ( car: $0,85 < 1$ )

cad $n > 8,53$ heures.

Ainsi le nombre entier d'heures à partir duquel le volume d'eau devient inférieur à un quart de litre est égal à: 9 heures.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3$ avec $U_0 = 6$...

Ici: • $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 6$.

Dans ces conditions: • $U_1 = \frac{1}{2} \times U_0 + 3 = 6$

• $U_2 = \frac{1}{2} \times U_1 + 3 = 6$

• $U_3 = \frac{1}{2} \times U_2 + 3 = 6$

...

• $U_n = \frac{1}{2} \times U_{n-1} + 3 = 6$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite $(U_n)$ est constante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 6$.

3. Soit $f(x) = 4 \ln(3x)$ pour tout $x \in ]0; +\infty[$, on a...

Ici: • $f(x) = 4 \ln(3x)$

• $\mathcal{D}f = ]0; +\infty[$.

Dans ces conditions pour tout $x \in ]0; +\infty[$: $f(2x) = 4 \times \ln[3(2x)]$

$= 4 \times \ln[3 \times 2 \times x]$

$= 4 \times \ln[2 \times 3 \times x]$

$= 4 \times (\ln(2) + \ln(3x))$

$= 4 \times \ln(2) + 4 \times \ln(3x)$

$= \ln(2^4) + 4 \times \ln(3x)$

$= \ln(16) + f(x).$

Ainsi pour tout $x \in ]0;+\infty[$: $f(2x) = f(x) + \ln(16).$

4. Soit $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ pour tout $x \in ]1;+\infty[$, $\mathscr{C}_g$ admet...

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la fonction g en $+\infty$ et la limite de la fonction g en $1^+$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

$= 0$ (Croissances Comparées).

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X}$, en posant $X = x - 1$

$= 1$, d'après le cours.

Or, d'après le cours:
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ell$,
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet

une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Donc ici, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet : une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ et aucune asymptote verticale.

5. Sur $\left[\frac{1}{e} ; 2\right]$, la fonction h s'annule...

Ici : • $h(x) = x^2(1 + 2\ln(x))$

• $\mathscr{D}h = \left[\frac{1}{e} ; 2\right]$.

Dans ces conditions : $h(x) = 0 \iff x^2(1 + 2\ln(x)) = 0$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + 2\ln(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \notin \left[\frac{1}{e} ; 2\right] \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x = 0 \quad (\text{à rejeter}) \\ \text{ou} \\ x = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

D'où sur $\left[\frac{1}{e} ; 2\right]$ : la fonction h s'annule exactement 1 fois.

**6. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est...**

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est:

$$y = h'(\sqrt{e}) \times (x - \sqrt{e}) + h(\sqrt{e}).$$

Or ici:
- $h(x) = x^2 (1 + 2\ln(x))$, pour tout $x \in ]0; 2]$,
- $h'(x) = 4x(1 + \ln(x))$, pour tout $x \in ]0; 2]$,
- $h(\sqrt{e}) = 2e$,
- $h'(\sqrt{e}) = 6\sqrt{e}$.

Dans ces conditions, nous avons: $y = (6\sqrt{e}) \times (x - \sqrt{e}) + 2e$

cad: $y = 6\sqrt{e}\,x - 4e$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc:

$$y = (6\sqrt{e})x - 4e \quad \text{cad} \quad y = (6e^{\frac{1}{2}})x - 4e.$$

**7. Sur $]0; 2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est...**

D'après le cours, si **h''** s'annule et change de signe en **a** alors $\mathcal{C}_h$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

Ici:
- $h'(x) = 4x(1 + \ln(x))$
- $\mathcal{D}h = ]0; 2]$.

D'après l'énoncé h est deux fois dérivable sur $]0; 2]$.

Par conséquent, nous pouvons calculer $h''$ pour tout $x \in ]0; 2]$.

Pour tout $x \in ]\,0\,;\,2\,]$: $\quad h''(x) = (4) \times (1 + \ln(x)) + (4x) \times \left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$= 4 \times (2 + \ln(x)).$$

Dans ces conditions, la fonction h '' s'annule et change de signe quand:

$$2 + \ln(x) = 0 \quad \text{cad} \quad x = e^{-2}.$$

Sur $]\,0\,;\,2\,]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est égal à: $\quad$ 1.