www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD

2022

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES V V V F F V

1. Pour tout $x \in IR$, $1 - \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$?

Pour tout $x \in IR$: $1 - \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{1 + e^x - (1 - e^x)}{1 + e^x}$

$$= \frac{2e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{e^x \times (2)}{e^x \times \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{2}{e^{-x} + 1}.$$

V

2. Pour tout $x \in IR$, $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution ?

Pour tout $x \in IR$: $g(x) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2}$

$$\iff e^x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}$$

$\Longleftrightarrow \quad e^x = 1$

cad : $x = 0$. **V**

3. $f(x) = x^2 e^{-x}$ et l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}_f$ en un seul point ?

L'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}_f$ ssi :

$$\begin{cases} y = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 e^{-x} = 0 \\ (2x \times e^{-x}) + (-x^2 \times e^{-x}) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \{ x^2 = 0, \text{ car } e^{-x} \neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \{ x = 0.$$ **V** Le point $(0 ; 0)$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^x (1 - x^2)$ et $\mathcal{C}_h$ n' admet pas de point d'inflexion ?

Ici :
- $h(x) = e^x (1 - x^2)$
- $\mathcal{D}h = \mathbb{R}$.

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, nous pouvons calculer h' et h'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $h'(x) = [\, e^x \times (1 - x^2) \,] + [\, e^x \times (-2x) \,]$

  $= (-x^2 - 2x + 1)\, e^x$.

- $h''(x) = [\, (-2x - 2) \times e^x \,] + [\, (-x^2 - 2x + 1) \times e^x \,]$

$= (-x^2 - 4x - 1)\, e^x.$

Notons que le signe de h" dépend du signe de $(-x^2 - 4x - 1)$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit l'équation: $-x^2 - 4x - 1 = 0.$ $\quad (ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-1)$

$= 12 > 0.$

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, **l'équation admet deux solutions distinctes**:

$$\bullet\ x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

$$\bullet\ x_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

D'après le cours, si **h"** s'annule et change de signe en **a** alors $\mathcal{C}_h$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

Or ici, cela se produit deux fois ! Donc **2 points d'inflexion** !!

F

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + x} = 0$?

Ici: $\bullet\ f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = \dfrac{e^x \times (1)}{e^x \times (1 + e^{-x})}$

$$= \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$. **F**

6. **Pour tout réel x, $1 + e^{2x} \geqslant 2e^x$?**

Pour tout réel x: $1 + e^{2x} \geqslant 2e^x \iff \underbrace{(e^x)^2 - 2(e^x) + 1 \geqslant 0}_{(1)}$?

Procédons à un changement de variable en posant: $X = e^x$.

Dans ces conditions: $(1) \iff X^2 - 2X + 1 \geqslant 0$?

$\iff (X - 1)^2 \geqslant 0$? c'est toujours vérifié. **V**