www.freemaths.fr

Spé Maths
Terminale

Densité de Probabilité

MINI COURS

I. Densité de probabilité:

1. Définition:

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle densité de probabilité de X, la fonction f définie sur $I\!R$ telle que pour tout intervalle [a ; b]:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Comment le montrer ?

On procède en trois étapes.

f est une densité de probabilité ssi:

- **f est continue par morceaux**
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
- **pour tout $x \in I\!R$, $f(x) \geqslant 0$.**

II. Fonction de répartition de X:

1. Définition:

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X,

la fonction F définie sur $I\!R$ par:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

2. Propriétés:

- F est continue sur $I\!R$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

- $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

III. Espérance mathématique de X:

1. Formule:

$$E(X) = \int_{+\infty}^{+\infty} x \,.\, f(x)\, dx.$$

2. Propriétés:

- $E(a \,.\, X + b) = a \,.\, E(X) + b$

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

IV. Variance de X:

1. Formule:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \,.\, f(x)\, dx - [\, E(X)\,]^2.$$

2. Propriétés:

- $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X et Y indépendantes.