BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

ASIE
2022

LA KERMESSE

CORRECTION

1. a. Donnons la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- B = " la case obtenue est blanche ".
- R = " la case obtenue est rouge ".
- G = " le joueur gagne la partie ".
- $\overline{G}$ = " le joueur perd la partie ".

- $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

- $P_B(G) = P_B$ (le jeton tiré est impair)
- $P_B(\overline{G}) = P_B$ (le jeton tiré est pair).

- $P_R(G) = P_R$ (les deux jetons tirés sont impairs)
- $P_R(\overline{G}) = 1 - P_R(G)$.

Dans ces conditions, calculer $P_B(G)$ revient à calculer la probabilité que le jeton tiré soit pair sachant que la case obtenue est blanche.

Or $P_B(G) = P$ (numéro du jeton $= 1$) $+ P$ (numéro du jeton $= 3$) $+ P$ (numéro du jeton $= 5$)

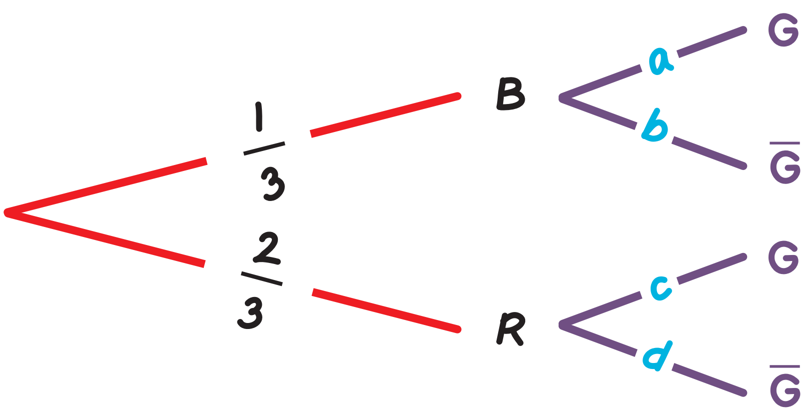
$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

Ainsi, la probabilité conditionnelle $P_B(G)$ est égale à : $\frac{3}{5}$.

1. b. Recopions et complétons l'arbre de probabilités :

L'arbre de probabilités complété est le suivant :



, avec :

- $a = \frac{3}{5}$
- $b = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $c = 0,3$
- $d = 1 - 0,3 = 0,7$.

Nous avons donc :

- $P_B(G) = \frac{3}{5}$
- $P_B(\overline{G}) = \frac{2}{5}$
- $P_R(G) = 0,3$

• $P_R(\overline{G}) = 0,7$.

2. a. Montrons que $P(G) = 0,4$:

Ici, il s'agit de calculer: **$P(G)$**.

L'événement $G = (G \cap B) \cup (G \cap R)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap R)$$

$$= P_B(G) \times P(B) + P_R(G) \times P(R)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + 0,3 \times \frac{2}{3}$$

$$= 0,4.$$

Ainsi, la probabilité que le joueur gagne la partie est de: 40%.

2. b. Calculons $P_G(B)$:

Calculer **$P_G(B)$** revient à déterminer la probabilité que le joueur ait obtenu une case blanche en lançant la roue, sachant que ce dernier a gagné la partie.

$$P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{P_B(G) \times P(B)}{P(G)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}}{0,4}$$

$$= 0,5.$$

Ainsi, il y a 50% de chance que le joueur ait obtenu une case blanche en lançant la roue, sachant qu'il a gagné la partie.

3. Les événements B et G sont-ils indépendants ?

D'après le cours, les événements B et G sont indépendants ssi:

$$P(B \cap G) = P(B) \times P(G).$$

Or ici:

- $P(B \cap G) = P_B(G) \times P(B) = \frac{1}{5}$
- $P(B) = \frac{1}{3}$
- $P(G) = 0,4 = \frac{2}{5}$.

Comme $P(B) \times P(G) = \frac{2}{15} \neq \frac{1}{5}$: les événements B et G ne sont pas indépendants.

4. a. Expliquons pourquoi X suit une loi binomiale et précisons ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant pour **un même joueur à faire dix parties**: les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.

Soient les événements G = " le joueur gagne la partie ", et $\overline{G}$ = " le joueur perd la partie ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: G et $\overline{G}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de G suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 0,4$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B(10\,;\,0,4)$.

4. b. Calculons la probabilité que le joueur gagne exactement trois parties:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 3)$, avec $X \leadsto B(10\,;\,0,4)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,4)^3 (1 - 0,4)^7$

$$\approx 0,215 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité que le joueur gagne exactement trois parties est d'environ: 21,5%.

4. c. Calculons $P(X \geqslant 4)$ et interprétons le résultat obtenu:

Ici nous devons calculer: $P(X \geqslant 4)$, avec $X \rightsquigarrow B(10; 0,4)$.

Or: $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4)$

$= 1 - P(X \leqslant 3)$

$\approx 0,618$ (calculatrice).

Ainsi, $P(X \geqslant 4) \approx 0,618$ ce qui signifie que la probabilité de gagner au moins 4 parties sur 10 est d'environ 61,8%.

5. a. Montrons que $p_n = 1 - (0,6)^n$:

La probabilité p_n que le joueur gagne au moins une partie sur n parties est:

$$p_n = P(X \geqslant 1), \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n; 0,4).$$

Or: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \binom{n}{0}(0,4)^0(1 - 0,4)^n$

$= 1 - (0,6)^n.$

Ainsi, nous avons bien: $p_n = 1 - (0,6)^n$.

5. b. Déterminons la plus petite valeur de l'entier naturel " n " pour laquelle on a $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n; 0,4).$$

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff p_n \geqslant 0,99$$

$$\iff 1 - (0,6)^n \geqslant 0,99$$

$$\iff (0,6)^n \leqslant 0,01$$

$$\iff n \ln(0,6) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \quad \text{cad} \quad n \geqslant 10 \text{ parties.}$$

Le player doit donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une, avec une probabilité d'au moins 99%.