BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 2

2022

PRISE D'ANTIBIOTIQUES

CORRECTION

PARTIE 1

1. Calculons $P(A \cap T)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " l'angine nécessite la prise d'antibiotiques ".
- $\overline{A}$ = " l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques ".
- T = " le test est positif ".
- $\overline{T}$ = " le test est négatif ".

- $P(A) = 25\%$
- $P(\overline{A}) = 1 - 25\% = 75\%$.

- $P_A(T) = 90\%$
- $P_A(\overline{T}) = 1 - 90\% = 10\%$.

- $P_{\overline{A}}(T) = 1 - 95\% = 5\%$

• $P_{\overline{A}}(\overline{T}) = 95\%$.

Ici, il s'agit de calculer: $P(A \cap T)$

$P(A \cap T) = P_A(T) \times P(A)$

$= 90\% \times 25\%$

$= 22,5\%$.

Ainsi, la probabilité que l'angine nécessite la prise d'antibiotiques et que le test soit positif est égale à: $22,5\%$.

2. Montrons que $P(T) = 0,2625$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(T)$.

L'événement $T = (T \cap A) \cup (T \cap \overline{A})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap \overline{A})$

$= P(A \cap T) + P_{\overline{A}}(T) \times P(\overline{A})$

$= 22,5\% + 5\% \times 75\%$

$= 0,2625\%$.

Ainsi, la probabilité que le test soit positif est bien égale à: $0,2625$ cad $26,25\%$.

3. Calculons $P_T(A)$:

Calculer la probabilité que le patient soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques sachant que le test est positif revient à déterminer:

$$P_T(A).$$

$$P_T(A) = \frac{P(T \cap A)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{22,5\%}{26,25\%}$$

$$\approx 85,71\%.$$

Sachant que le test est positif, la probabilité que le patient soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est égale à environ: 85,71%.

4. a. Les événements correspondants à un résultat erroné du test ?

Les événements correspondants à un résultat erroné du test soit:

$$\overline{A} \cap T \text{ et } A \cap \overline{T}.$$

4. b. Montrons que P (" le test fournit un résultat erroné ") = 0, 0625:

Soit E, l'événement: " le test fournit un résultat erroné ".

$$P(E) = P(\overline{A} \cap T) + P(A \cap \overline{T})$$

$$= P_{\overline{A}}(T) \times P(\overline{A}) + P_A(\overline{T}) \times P(A)$$

$$= 5\% \times 75\% + 10\% \times 25\%$$

$$= 0,0625.$$

Ainsi la probabilité que le test fournisse un résultat erroné est bien égale à: $0,0625$ **cad** $6,25\%$.

PARTIE 2

1. a. Justifions que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(50; 0,0625)$:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **sélectionner au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés**: on assimile ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

Soient les événements $E =$ " le test fournit un résultat erroné ", et $\overline{E} =$ " le test fournit un bon résultat ".

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 50 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: E et $\overline{E}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de E suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 50$ et $p = 0,0625$.

En effet: $P(E) = 0,0625$, d'après PARTIE 1.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(50; 0,0625)$.

1. b. Calculons $P(X = 7)$:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 7)$, avec $X \rightsquigarrow B(50\,;\,0,0625)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 7) = \binom{50}{7} (0,0625)^7 \, (1 - 0,0625)^{43}$

$$\approx 0,0237 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité qu'exactement 7 patients de cet échantillon aient un test erroné est d'environ: 2,37 %.

1. c. Calculons la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P(X \geqslant 1)$.

Or: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \binom{50}{0} (0,0625)^0 \, (1 - 0,0625)^{50}$$

$$= 1 - (1 - 0,0625)^{50}$$

$$\approx 0,9603 \quad (\text{calculatrice}).$$

Ainsi, la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est d'environ: 96, 03 %.

2. Déterminons la valeur minimale de l'entier naturel " n " que l'on doit choisir pour que $P(X \geq 10) > 0,95$:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geq 10) > 0,95, \text{ avec } X \leadsto B(n; 0,0625).$$

$$P(X \geq 10) > 0,95 = P(X < 10) \leq 0,05$$

$$= P(X \leq 9) \leq 0,05.$$

A la calculatrice et par tâtonnement:

- $P(X \leq 9) \approx 0,0514$ avec $n = 247$
- $P(X \leq 9) \approx 0,0498$ avec $n = 248$.

Ainsi, il faut au minimum 248 patients cad $n = 248$, pour que nous ayons:

$$P(X \geq 10) > 0,95.$$