BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

PENSEZ-VOUS AVOIR RÉUSSI ?

CORRECTION

1. Précisons les valeurs de $P(Q)$ et de $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$:

D'après l'énoncé, nous avons:

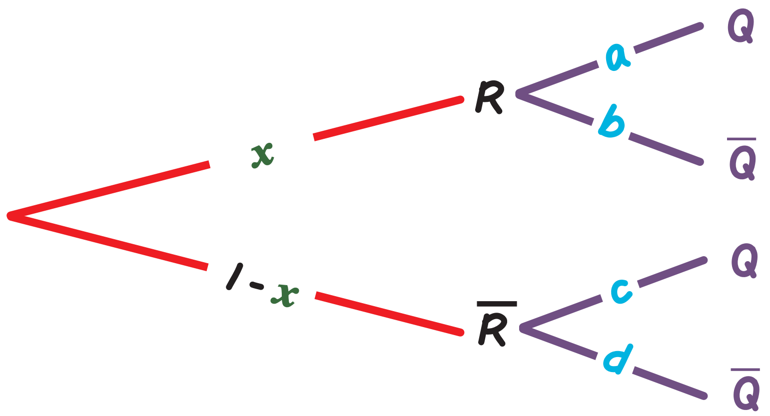
- Q = " l'étudiant a répondu OUI "
- $\overline{Q}$ = " l'étudiant a répondu NON ".
- R = " l'étudiant a réussi l'examen "
- $\overline{R}$ = " l'étudiant a échoué l'examen ".
- $P(Q) = 91,7\,\%$
- $P(\overline{Q}) = 1 - 91,7\,\% = 8,3\,\%$.
- $P_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 65\,\%$
- $P_{\overline{R}}(Q) = 1 - 65\,\% = 35\,\%$.
- $P_R(Q) = 98\,\%$
- $P_R(\overline{Q}) = 1 - 98\,\% = 2\,\%$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

- $P(Q) = 91,7\%$
- $P_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 65\%$.

2. a. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

Compte tenu de la question précédente, l'arbre pondéré complété est le suivant:



, avec:

- $a = 98\%$
- $b = 2\%$
- $c = 35\%$
- $d = 65\%$

.

2. b. Montrons que $x = 0,9$:

Répondre à cette question revient à calculer: $P(R)$.

L'événement $Q = (Q \cap R) \cup (Q \cap \overline{R})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(Q) = P(Q \cap R) + P(Q \cap \overline{R})$$

$$= x \times 0,98 + (1 - x) \times 0,35$$

$$= 0,63 \times x + 0,35.$$

Nous devons donc résoudre l'équation: $P(Q) = 0,63 \times x + 0,35$.

$P(Q) = 0,63 \times x + 0,35 \iff 91,7\% = 0,63 \times x + 0,35$

cad $x = 0,90$.

Ainsi, nous avons bien: $x = 0,9$.

3. Déterminons la probabilité que l'étudiant ait réussi l'examen sachant qu'il a répondu OUI:

Cela revient à calculer: $P_Q(R)$.

$$P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)}$$

$$= \frac{0,9 \times 0,98}{0,917}$$

$$\approx 96,2\%.$$

Donc la probabilité que l'étudiant ait réussi l'examen sachant qu'il a répondu OUI est d'environ: 96,2%.

4. A partir de quelle note attribuer les récompenses ?

Ici, la note obtenue par un étudiant est modélisée par une variable aléatoire N qui suit une loi binomiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 0,615$.

Et nous pouvons noter: $N \rightsquigarrow B(20\,;\,0,615)$.

Déterminer la note à obtenir pour que 65% des étudiants soient récompensés revient à trouver la valeur de " y " telle que:

$$P(N \geq y) = 65\%.$$

Or à l'aide d'une calculatrice et sachant que $N \leadsto B(20 ; 0,615)$, on a:

- $P(N \geq y = 11) \approx 79,7\%$
- $P(N \geq y = 12) \approx 64,9\%.$

Ainsi, en récompensant les candidats dont la note est supérieure ou égale à $y = 12$ sur 20, la directrice récompensera environ 65% d'entre eux.

5. Calculons $E(S)$ et $V(S)$:

D'après l'énoncé, les variables N_i sont indépendantes et suivent la même loi binomiale $B(20 ; 0,615)$ cad $B(n ; p)$.

Dans ces conditions, et d'après le cours, nous avons:

- $E(N_i) = n \cdot p = 20 \times 0,615 = 12,3$ sur 20
- $V(N_i) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \times 0,615 \times (1 - 0,615) = 4,7355$ sur 20.

$S = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_{10}$, les variables aléatoires N_i étant indépendantes.

D'où: • $E(S) = E(N_1 + N_2 + \ldots + N_{10})$

$$= E(N_1) + E(N_2) + \ldots + E(N_{10})$$

$$= 12,3 + 12,3 + \ldots + 12,3$$

$$= 10 \times 12,3$$

$$= 123.$$

• $V(S) = V(N_1 + N_2 + \ldots + N_{10})$

$= V(N_1) + V(N_2) + \ldots + V(N_{10})$

$= 10 \times 4,7355$

$= 47,355.$

Au total: $E(S) = 123$ et $V(S) = 47,355$.

6. a. Que modélise la variable aléatoire M ?

Ici: $M = \dfrac{S}{10} \iff M = \dfrac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_{10}}{10}$

cad $M = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} N_i}{10}$.

M modélise donc: la moyenne des notes obtenues par un échantillon de dix étudiants.

6. b. Justifions que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$:

Rappelons que d'après le cours: • $E(a.X) = a.E(X)$

• $V(a.X) = a^2.V(X)$.

D'où ici: • $E(M) = E\left(\dfrac{S}{10}\right) = \dfrac{1}{10} \times E(S) = 12,3$

• $V(M) = V\left(\dfrac{S}{10}\right) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \dfrac{V(S)}{100} = 0,47355$.

Ainsi nous avons bien: $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

6. c. Justifions l'affirmation:

" La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10, 3 et 14, 3 est d'au moins 80%. "

Pour justifier cette affirmation, nous allons montrer que:

$$P(10,3 < M < 14,3) \geq 80\%.$$

$$\begin{aligned} P(10,3 < M < 14,3) &= P(10,3 - E(M) < M - E(M) < 14,3 - E(M)) \\ &= P(10,3 - 12,3 < M - E(M) < 14,3 - 12,3) \\ &= P(-2 < M - E(M) < 2) \\ &= P(|M - E(M)| < 2) \\ &= 1 - P(|M - E(M)| \geq 2). \end{aligned}$$

En ayant recours à **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(10,3 < M < 14,3) \geq 1 - \frac{V(M)}{2^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(|M - E(M)| < 2) \geq 1 - \frac{0,47355}{4}$$

cad $P(|M - E(M)| < 2) \geq 88,16\%.$

Comme $88,16\% > 80\%$, l'affirmation et exacte !