BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE

2024

LE CÔTÉ " FACE "

CORRECTION

PARTIE A

1. **Précisons la nature et les paramètres de la loi de probabilité de X:**

Soit l'expérience aléatoire consistant à **lancer 3 fois une pièce de monnaie**.

Soient les événements F = " **Face** apparaît à l'issue du lancer ", et $\overline{F}$ = " **Pile** apparaît à l'issue du lancer ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où " **Face** " apparaît lors de ces 3 lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 3 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: F et $\overline{F}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de **F** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(3 ; \frac{1}{2}\right)$.

2. Complétons le tableau donnant la loi de probabilité de X:

Le tableau complété est le suivant:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.(1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: • $P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(1-\frac{1}{2}\right)^{(3-0)}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}$$

• $P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(1-\frac{1}{2}\right)^{(3-1)}$

$$=\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 3 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

• $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-2)}$

$$= \frac{3!}{2!(3-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 3 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

• $P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 . \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-3)}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}.$$

Au total, nous avons donc bien: • $P(X=0) = \frac{1}{8}$

• $P(X=1) = \frac{3}{8}$

• $P(X=2) = \frac{3}{8}$

• $P(X=3)=\frac{1}{8}$.

PARTIE B

1. **Montrons que $P_{A_1}(G)=\frac{1}{4}$:**

D'après l'énoncé, nous avons:

• G = " la partie est gagnée "

• $\overline{G}$ = " la partie est perdue ".

• A_0 = " 0 pièce est tombée du côté **Face** au premier lancer "

• A_1 = " 1 pièce est tombée du côté **Face** au premier lancer "

• A_2 = " 2 pièces sont tombées du côté **Face** au premier lancer "

• A_3 = " 3 pièces sont tombées du côté **Face** au premier lancer ".

• $P(A_0)=P(A_3)=\frac{1}{8}$

• $P(A_1)=P(A_2)=\frac{3}{8}$.

Dans ces conditions, " $P_{A_1}(G)$ " correspond à la probabilité de gagner la partie sachant qu'une seule pièce est tombée du côté " **Face** " au premier lancer.

Il y a 4 résultats équiprobables possibles pour le second lancer:

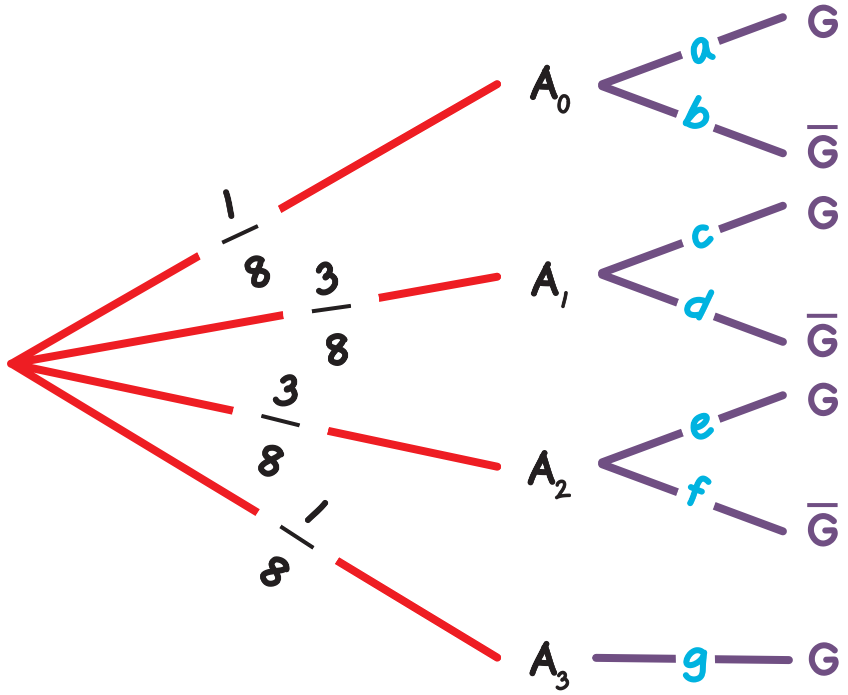
PP • PF • FP • FF

Or seul **FF** nous intéresse, sachant que $P(FF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Au total: $P_{A_1}(G) = P(FF) = \frac{1}{4}$.

2. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

L'arbre pondéré complété est le suivant:



, avec:

- $a = \frac{1}{8}$
- $b = \frac{7}{8}$
- $c = \frac{1}{4}$
- $d = \frac{3}{4}$
- $e = \frac{1}{2}$
- $f = \frac{1}{2}$
- $g = 1$

.

En effet: • $P_{A_0}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

• $P_{A_2}(G) = \frac{1}{2}$

• $P_{A_3}(G) = 1.$

3. Montrons que la probabilité " p " de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$:

Ici, il s'agit de calculer: $p = P(G)$.

L'événement $G = (G \cap A_0) \cup (G \cap A_1) \cup (G \cap A_2) \cup (G \cap A_3)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(G) = P(G \cap A_0) + P(G \cap A_1) + P(G \cap A_2) + P(G \cap A_3)$$

$$= P_{A_0}(G) \times P(A_0) + P_{A_1}(G) \times P(A_1) + P_{A_2}(G) \times P(A_2) + P_{A_3}(G) \times P(A_3)$$

$$= \left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}\right) + \left(1 \times \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{27}{64}.$$

Ainsi, la probabilité " p " de gagner à ce jeu est: $p = \frac{27}{64}$.

4. Déterminons la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté " Face " à la première tentative sachant que la partie est gagnée:

Répondre à cette question revient à calculer: $P_G(A_1)$.

$$P_G(A_1) = \frac{P(G \cap A_1)}{P(G)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{P_{A_1}(G) \times P(A_1)}{P(G)}$$

$$= \frac{6}{27}.$$

Ainsi, la probabilité recherchée est égale à: $\frac{2}{9}$.

5. Combien de fois ?

Calculer combien de fois il faut jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que: $P(Y \geq 1) > 0,95$, avec $Y \leadsto B\left(n ; \frac{27}{64}\right)$.

$$P(Y \geq 1) > 0,95 \iff 1 - P(Y < 1) > 0,95$$

$$\iff 1 - P(Y = 0) > 0,95$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{27}{64}\right)^0\left(1 - \frac{27}{64}\right)^n > 0,95$$

$$\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n < 0,05$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05$$

$$\Longleftrightarrow n \times \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0,05)$$

$$\Longleftrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}$$ cad $n > 6$ parties.

Ainsi en jouant 6 parties, la probabilité de gagner au moins une partie dépassera 95%.