www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

ASIE

2024

LANCET PUBLIC HEALTH

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons la probabilité que cet individu ait déjà été infecté :

Comme 5, 7% des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du Lancet, la probabilité que cet individu ait déjà été infecté est de : 5, 7%.

2. a. Justifions que X suit une loi binomiale et donnons ses paramètres :

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever un échantillon de 100 personnes choisies de façon indépendante les unes des autres** : on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées parmi les 100 personnes.

La probabilité qu'un individu ait déjà été infecté = 5, 7% = $P(I)$.

I = " l'adulte a déjà été infecté ".

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles I et $\overline{I}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de I suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 100$ et $p = 5,7\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(100 ; 5,7\%)$.

2. b. Calculons E (X) et interprétons le résultat:

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Ici nous avons donc: $E(X) = 100 \times 5,7\%$

$= 5,7$ **personnes**.

Ainsi en moyenne, 6 personnes (sur 100) avaient déjà été infecté par le Covid 19.

2. c. Déterminons P (X = 0):

Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon revient à calculer: $P(X = 0)$, avec $X \rightsquigarrow B(100 ; 5,7\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k} \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X=0) = \binom{100}{0}(5,7\%)^0(1-5,7\%)^{(100-0)}$

$= (94,3\%)^{100}$

$\approx 0,0028$ (calculatrice).

Ainsi, la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est d'environ: 0, 28%.

2\. d. Déterminons $P(X \geqslant 2)$:

Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon revient à calculer: $P(X \geqslant 2)$, avec $X \leadsto B(100; 5,7\%)$.

Or: $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2)$

$= 1 - P(X \leqslant 1)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - \left[0,0028 + \binom{100}{1}(5,7\%)^1(1-5,7\%)^{(100-1)} \right]$

$= 1 - 0,0028 - 100 \times 5,7\% \times (94,3\%)^{99}$

$\approx 0,9801$ (calculatrice).

Ainsi, la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon est d'environ: 98, 01%.

2. e. e_1. Déterminons le plus petit entier " n " tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$:

Déterminer le plus petit entier " n " tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$ revient à trouver la valeur de " y " telle que: $P(X \leqslant y) > 0,9$.

Or à l'aide d'une calculatrice et sachant que $X \rightsquigarrow B(100\,;5,7\%)$, on a:

- $P(X \leqslant y = 8) \approx 0,8829$
- $P(X \leqslant y = 9) \approx 0,9408$.

Ainsi, le petit entier " n " tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$ est: $n = 9$.

2. e. e_2. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie que dans un échantillon de 100 personnes choisies au hasard, il y a plus de 90% de chance pour que le nombre d'entre elles préalablement infectées soit inférieur ou égal à 9.

PARTIE B

1. Complétons l'arbre des probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- T = " le test réalisé est positif "
- $\overline{T}$ = " le test réalisé est négatif ".
- I = " la personne a été infectée "

- $\overline{I}$ = " la personne n'a pas été infectée ".

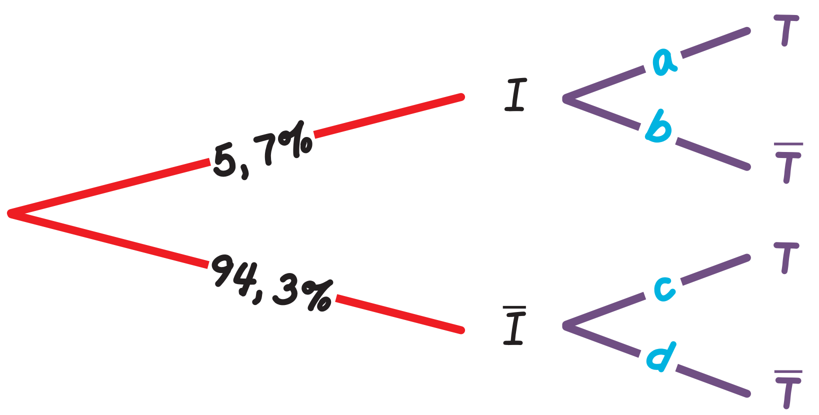
- $P_I(T) = 0,8$

- $P_I(\overline{T}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

- $P_{\overline{I}}(\overline{T}) = 0,99$

- $P_{\overline{I}}(T) = 1 - 0,99 = 0,01$.

D'où l'arbre des probabilités complété est le suivant:



, **avec:**

- $a = 0,8$
- $b = 0,2$
- $c = 0,01$
- $d = 0,99$

2. Montrons que P (T) = 0, 05503:

L'événement $T = (T \cap I) \cup (T \cap \overline{I})$.

D'après le formule des **probabilités totales**:

$$\mathbf{P(T)} = P(T \cap I) + P(T \cap \overline{I})$$

$$= P_I(T) \times P(I) + P_{\overline{I}}(T) \times P(\overline{I})$$

$$= 0,8 \times 5,7\% + 0,01 \times 94,3\%$$

$= 0,05503.$

Ainsi, la probabilité que le test réalisé soit positif est bien égale à:

$$0,05503.$$

3. Calculons $P_T(I)$:

Déterminer la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif revient à calculer: $P_T(I)$.

$$P_T(I) = \frac{P(T \cap I)}{P(T)}$$

$$= \frac{P(I \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{P_I(T) \times P(I)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,8 \times 5,7\%}{0,05503}$$

$$\approx 0,8286.$$

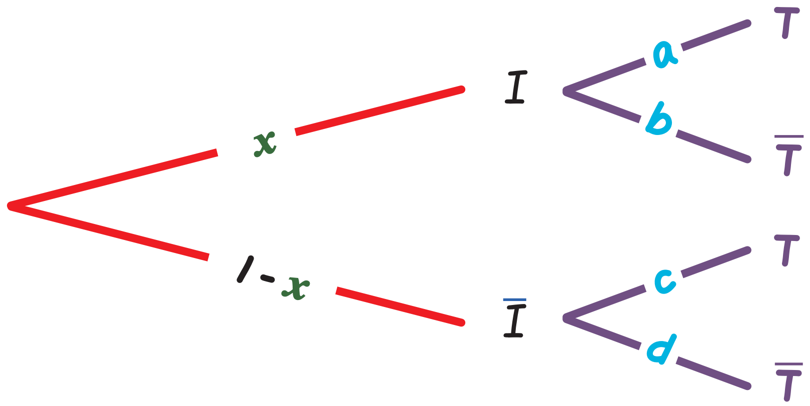
Ainsi, la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif est d'environ: $82,86\%$.

PARTIE C

Déterminons la probabilité qu'il ait été infecté:

Nous savons que dans ce nouveau groupe: **29, 44% des individus ont un test positif**.

On choisit au hasard un individu dans ce nouveau groupe. Déterminer la probabilité qu'il ait été infecté revient à calculer **$x = P(I)$ sachant que**:



, avec:

- $a = 0,8$
- $b = 0,2$
- $c = 0,01$
- $d = 0,99$

Pour ce faire, nous allons résoudre l'équation: **$P(T) = 29,44\%$**.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$P(T) = 29,44\%$ <=> $P(T \cap I) + P(T \cap \bar{I}) = 29,44\%$

<=> $P_I(T) \times P(I) + P_{\bar{I}}(T) \times P(\bar{I}) = 29,44\%$

<=> $0,8 \times x + 0,01 \times (1 - x) = 29,44\%$

cad $x = 36\%$.

Au total, la probabilité que l'individu choisi au hasard ait été infecté est de: 36%.