BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

ASIE

2024

JOUER À UN JEU VIDÉO

CORRECTION

1. Déterminons la valeur de $P_{G_1}(D_2)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- G_n = " Léa gagne la n-ième partie "
- D_n = " Léa perd la n-ième partie ".

- $P(G_n) = g_n$
- $P(D_n) = 1 - g_n$.

- $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,70$
- $P_{G_n}(D_{n+1}) = 1 - 0,70 = 0,30$.

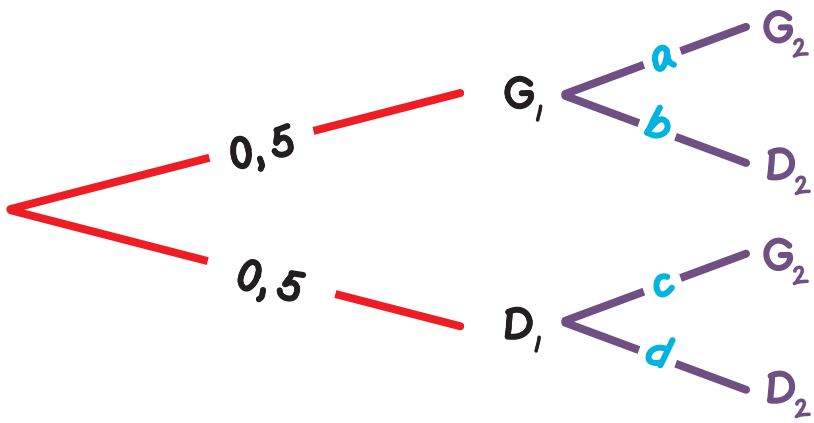
- $P_{D_n}(G_{n+1}) = 0,2$
- $P_{D_n}(D_{n+1}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

- $P(G_1) = P(D_1) = 0,5 = g_1$.

Dans ces conditions: $P_{G_1}(D_2) = 0,3$.

2. Complétons l'arbre des probabilités:

Compte tenu des données de la question précédent, **l'arbre des probabilités complété est le suivant**:



, **avec**:

- $a = 0,7$
- $b = 0,3$
- $c = 0,2$
- $d = 0,8$

.

3. Calculons g_2:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathbf{P(G_2) = g_2}$.

L'événement $G_2 = (G_2 \cap G_1) \cup (G_2 \cap D_1)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$\mathbf{P(G_2)} = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap D_1)$$

$$= P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{D_1}(G_2) \times P(D_1)$$

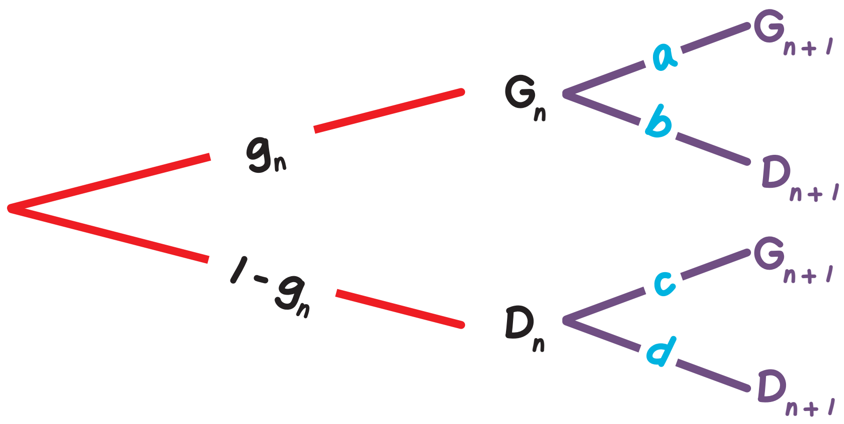
$$= 0,7 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5$$

$$= 0,45.$$

Ainsi, la probabilité pour Léa de gagner la seconde partie est: $g_2 = 45\%$.

4. a. Complétons le nouvel arbre des probabilités:

Le nouvel arbre des probabilités complété est le suivant:



, avec: $\cdot\, a = 0,70$; $\cdot\, b = 0,30$; $\cdot\, c = 0,2$; $\cdot\, d = 0,8$.

4. b. Justifions que pour tout entier naturel non nul n, $g_{n+1} = 0,5\, g_n + 0,2$:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $P(G_{n+1}) = g_{n+1}$.

Pour tout entier naturel non nul n, nous avons:

- L'événement $G_{n+1} = (G_{n+1} \cap G_n) \cup (G_{n+1} \cap D_n)$.
- D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap D_n)$$

$$= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{D_n}(G_{n+1}) \times P(D_n)$$

$$= 0,70 \times g_n + 0,2 \times (1 - g_n)$$

$$= 0,5 \times g_n + 0,2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n: $g_{n+1} = 0,5\, g_n + 0,2$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera premier terme et raison:

Ici pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: • $g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2$

• $V_n = g_n - 0,4$.

$V_n = g_n - 0,4 \iff V_{n+1} = g_{n+1} - 0,4$

$\iff V_{n+1} = (0,5 g_n + 0,2) - 0,4 \quad (1)$.

Or : $V_1 = g_1 - 0,4$ cad $V_1 = 0,5 - 0,4 = 0,1$ et $g_n = V_n + 0,4$.

D'où : $(1) \iff V_{n+1} = (0,5 [V_n + 0,4] + 0,2) - 0,4$

$\iff V_{n+1} = 0,5 V_n$.

(V_n) est donc bien une suite géométrique avec : • $V_1 = 0,1$

• $q = 0,5$.

5. b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = 0,1 \times 0,5^{(n-1)} + 0,4$:

Pour tout entier naturel n, d'après le cours : $V_n = V_1 \times q^{(n-1)}$.

D'où ici : • $V_n = 0,1 \times 0,5^{(n-1)}$

• $g_n = V_n + 0,4 = 0,1 \times 0,5^{(n-1)} + 0,4$.

6. Étudions les variations de la suite (g_n) :

Pour tout entier naturel non nul, nous allons étudier le signe de :

$$g_{n+1} - g_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^{(n)} + 0,4 - [0,1 \times 0,5^{(n-1)} + 0,4]$

$$= 0,1 \times 0,5^n \times \left(1 - \frac{1}{0,5} \right)$$

$$= -0,1 \times 0,5^n < 0.$$

Comme $g_{n+1} - g_n < 0$, nous pouvons affirmer que: la suite (g_n) est strictement décroissante.

7. Donnons la limite de la suite (g_n) et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} g_n = \lim_{n \to +\infty} 0,1 \times 0,5^{(n-1)} + 0,4$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 0,4$$

$$= 0,4 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0, \text{ car } \frac{1}{2} \in]0;1[.$$

Ainsi, nous avons: $\lim_{n \to +\infty} g_n = 0,4.$

Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours, Léa gagnera dans 40% des cas.

8. Déterminons le plus petit entier " n " tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$:

Pour tout entier naturel non nul n, résolvons l'inéquation: $g_n - 0,4 \leqslant 0,001.$

$$g_n - 0,4 \leqslant 0,001 \iff 0,1 \times 0,5^{(n-1)} + 0,4 - 0,4 \leqslant 0,001$$

$$\iff 0,5^{(n-1)} \leqslant 0,01$$

$$\iff \ln\left[0,5^{(n-1)}\right] \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff (n-1) \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car} \quad 0,5 \in]0;1[$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \quad \text{cad} \quad n \geqslant 8.$$

Ainsi, le plus petit entier naturel " n " recherché est : $n = 8$.

9. Recopions et complétons l'algorithme :

Les lignes 4 et 6 complétées, afin que la fonction renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, sont les suivantes :

```
1   def seuil(e):
2       g = 0, 5
3       n = 1
4       while g > 0.4 + e:
5
6           n = n + 1
7       return (n)
```