BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD
2024

ÉPÉES ET BOUCLIERS

CORRECTION

PARTIE A

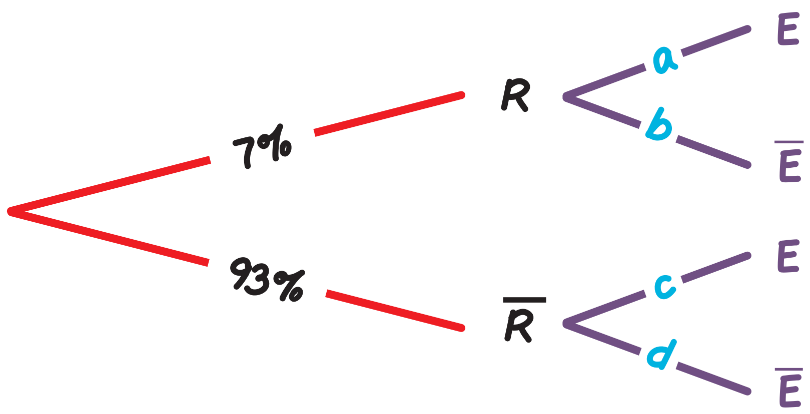
1. a. Dressons un arbre pondéré modélisant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R = " le joueur tire un objet rare "
- $\overline{R}$ = " le joueur tire un objet commun ".
- E = " le joueur tire une épée "
- $\overline{E}$ = " le jour tire un bouclier ".
- $P(R) = 7\%$
- $P(\overline{R}) = 1 - 7\% = 93\%$.
- $P_R(E) = 80\%$
- $P_R(\overline{E}) = 1 - 80\% = 20\%$.

- $P_{\overline{R}}(E) = 40\%$
- $P_{\overline{R}}(\overline{E}) = 1 - 40\% = 60\%$.

D'où l'arbre pondéré modélisant la situation est le suivant:



, avec:

- $a = 80\%$
- $b = 20\%$
- $c = 40\%$
- $d = 60\%$.

1. b. Calculons $P(R \cap E)$:

$$P(R \cap E) = P_R(E) \times P(R)$$

$$= 80\% \times 7\%$$

$$= 0,056.$$

Ainsi, la probabilité que le joueur tire un objet rare **et** qu'il s'agisse d'une épée est de: **5,6%**.

2. Calculons la probabilité de tirer une épée:

Il s'agit ici de calculer: $P(E)$.

L'événement $E = (E \cap R) \cup (E \cap \overline{R})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$\mathbf{P(E)} = P(E \cap R) + P(E \cap \overline{R})$$

$$= 0,056 + P_{\overline{R}}(E) \times P(\overline{R})$$

$$= 0,056 + 40\% \times 93\%$$

$$= \mathbf{0,428}.$$

Ainsi, la probabilité de tirer une épée est de: 42, 8%.

3. Déterminons $P_E(R)$:

Déterminer la probabilité que l'objet tiré soit un objet rare sachant qu'il s'agit d'une épée revient à calculer: $\mathbf{P_E(R)}$.

$$\mathbf{P_E(R)} = \frac{P(E \cap R)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(R \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{0,056}{0,428}$$

$$\approx \mathbf{0,131}.$$

Ainsi, la probabilité que l'objet tiré soit un objet rare sachant qu'il s'agit d'une épée est d'environ: 13, 1%.

PARTIE B

1. a. Déterminons la loi de probabilité suivie par X et précisons ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **remporter 30 défis pour un joueur**: les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis.

Nous savons que: **la probabilité de remporter un défi = 7% = P (R).**

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 30 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: R et $\overline{R}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de R suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 30$ **et** $p = 7\%$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B\,(30\,;\,7\%)$.

1. b. Calculons E (X):

D'après le cours: $E\,(X) = n\,.\,p$.

Ici nous avons donc: $E\,(X) = 30 \times 7\%$

$= 2,1$ **défis remportés.**

2. Déterminons $P(X<6)$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(X<6)$, avec $X \rightsquigarrow B(30\,;7\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Or: $P(X<6)=P(X\leqslant 5)$

$$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$\approx 0,984 \quad (\text{calculatrice}).$$

D'où: $P(X<6)\approx 98,4\%$.

3. Déterminons la plus grande valeur de k telle que $P(X\geqslant k)\geqslant 0,5$ et interprétons:

Déterminer la plus grande valeur de " k " tel que $P(X\geqslant k)\geqslant 0,5$ revient à trouver la valeur de " y " telle que: $P(X\geqslant y)\geqslant 0,5$.

Or: $P(X\geqslant y)\geqslant 0,5 \iff 1-P(X\leqslant y-1)\geqslant 0,5$

cad $P(X\leqslant y-1)\leqslant 0,5$.

À l'aide d'une calculatrice et sachant que $X \rightsquigarrow B(30\,;7\%)$, on a:

- $P(X \leqslant 1) \approx 0,369$
- $P(X \leqslant 2) \approx 0,649$.

Nous retiendrons: $P(X \leqslant 1)$ car $0,369 \leqslant 0,5$.

Dans ces conditions: $y - 1 = 1$ cad $y = 2$.

Ainsi la valeur recherchée pour k est: $k = 2$.

Cela signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\frac{1}{2}$.

4. Déterminons le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre l'objectif:

Les développeurs aimeraient que: la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0, 95.

Il s'agit donc ici de déterminer l'entier naturel " N " tel que:

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95, \text{ avec } Y \rightsquigarrow B(N; 7\%).$$

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 \iff 1 - P(Y < 1) \geqslant 0,95$$

$$\iff 1 - P(Y = 0) \geqslant 0,95$$

$$\iff P(Y = 0) \leqslant 0,05$$

$$\iff \binom{N}{0}(7\%)^0 . (1 - 7\%)^N \leqslant 0,05$$

$$\iff (93\%)^N \leqslant 0,05$$

$$\iff N \times \ln(93\%) \leqslant \ln(0,05)$$

$$\iff N \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln(93\%)}$$ cad $N > 42$ objets à tirer.

Le nombre minimal d'objets à tirer est égal à : 42.