BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 1

2024

CONTRÔLES ANTIDOPAGE

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons la dérivée de f pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}f = [\,0\,;\,1\,]$.

La fonction $f(x) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03}$ est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ comme

quotient de deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[\,0\,;\,1\,]$,

avec $0,93x + 0,03 \neq 0$ pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$: $f'(x) = \dfrac{(0,96) \times (0,93x + 0,03) - (0,96x) \times (0,93)}{(0,93x + 0,03)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{0,03 \times 0,96}{(0,93x + 0,03)^2}$$

$$= \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}.$$

Ainsi pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, nous avons: $f'(x) = \dfrac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$.

2. Déterminons le sens de variation de f sur $[\,0\,;\,1\,]$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$: $f'(x) = \dfrac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2} > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$.

PARTIE B

1. Recopions et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D = " le sportif est dopé "
- $\overline{D}$ = " le sportif n'est pas dopé ".

- T = " le test est positif "

- $\overline{T}$ = " le test et négatif ".

- $P(D) = x$

- $P(\overline{D}) = 1 - x$.

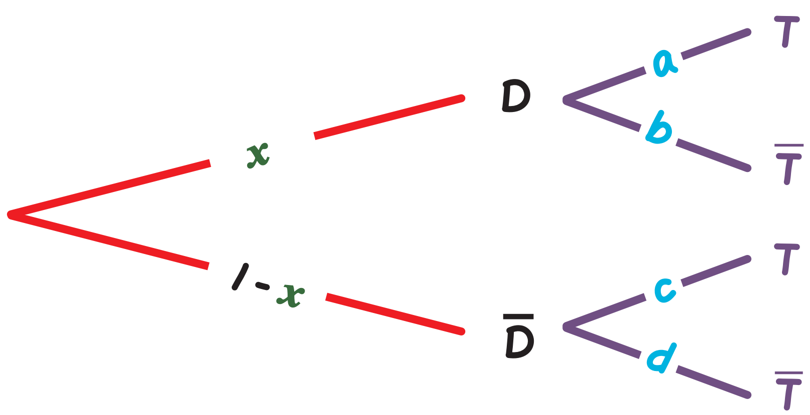
- $P_D(T) = 0,96$

- $P_D(\overline{T}) = 1 - 0,96 = 0,04$.

- $P_{\overline{D}}(T) = 0,03$

- $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 1 - 0,03 = 0,97$.

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 0,96$
- $b = 0,04$
- $c = 0,03$
- $d = 0,97$

.

2. Déterminons, en fonction de " x ", $P(D \cap T)$:

Déterminer la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif revient à calculer: $P(D \cap T)$.

$P(D \cap T) = P_D(T) \times P(D)$

$= 0,96 \times x.$

Ainsi, en fonction de x : $P(D \cap T) = 0,96x.$

3. Montrons que $P(T) = 0,93x + 0,03$:

L'événement $T = (T \cap D) \cup (T \cap \overline{D}).$

D'après la formule des **probabilités totales** :

$P(T) = P(T \cap D) + P(T \cap \overline{D})$

$= P(D \cap T) + P_{\overline{D}}(T) \times P(\overline{D})$

$= 0,96 \times x + 0,03 \times (1 - x)$

$= 0,93x + 0,03.$

Ainsi nous avons bien : $P(T) = 0,93x + 0,03.$

4. Montrons que $P_T(D) = f(0,05)$:

- Nous avons : $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)}$

$= \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03}.$

- Et : $f(0,05) = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03}$

$\approx 0,627.$

Or " il y a **50** sportifs dopés parmi les **1000** testés ", d'où: $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0,05.$

Ainsi: $P_T(D) = \dfrac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03}$

$\approx 0,627.$

En définitive, nous avons bien: $P_T(D) = f(0,05) \approx 62,7\%.$

5. a. Déterminons à partir de quelle valeur de " x " la valeur prédictive positive du test est $\geqslant 0,9$:

La valeur prédictive positive du test correspond à la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

La valeur prédictive positive du test correspond donc à: $P_T(D).$

Or: $P_T(D) = \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03}.$

Dans ces conditions, déterminer la valeur de " x " à partir de laquelle la valeur prédictive positive du test est supérieure ou égale à 0, 9 revient à résoudre l'inéquation: $P_T(D) \geqslant 0,9.$

$$P_T(D) \geqslant 0,9 \iff \dfrac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geqslant 0,9$$

$$\iff 0,96x \geqslant 0,9 \times (0,93x + 0,03)$$

$$\iff 0,123x \geqslant 0,027$$

cad $x \geqslant \frac{9}{41}$.

Ainsi pour $x \geqslant 0,22$, la valeur prédictive positive du test sera supérieure à 90%.

5. b. Déterminons la conséquence de cette décision:

Comme la valeur prédictive positive du test est $P_T(D) = f(x)$ et que la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$, plus " x " augmente plus $P_T(D)$ augmente et, par conséquent, plus la valeur prédictive positive du test augmente.

Ici " les sportifs les plus performants sont ciblés ", donc " x " augmente et OUI la valeur prédictive positive du test augmentera.