www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

ACHAT D'UN TÉLÉVISEUR

CORRECTION

1. Complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- I = " achat sur internet "
- M = " achat en magasin d'électroménager "
- G = " achat en grande surface ".

- S = " client satisfait du service clientèle "
- $\overline{S}$ = " client pas satisfait du service clientèle ".

- $P(I) = 60\ \%$
- $P(M) = 30\ \%$
- $P(G) = 10\ \%$.

- $P_I(S) = 75\ \%$
- $P_I(\overline{S}) = 1 - 0,75 = 25\ \%$.

Freemaths : Tous droits réservés

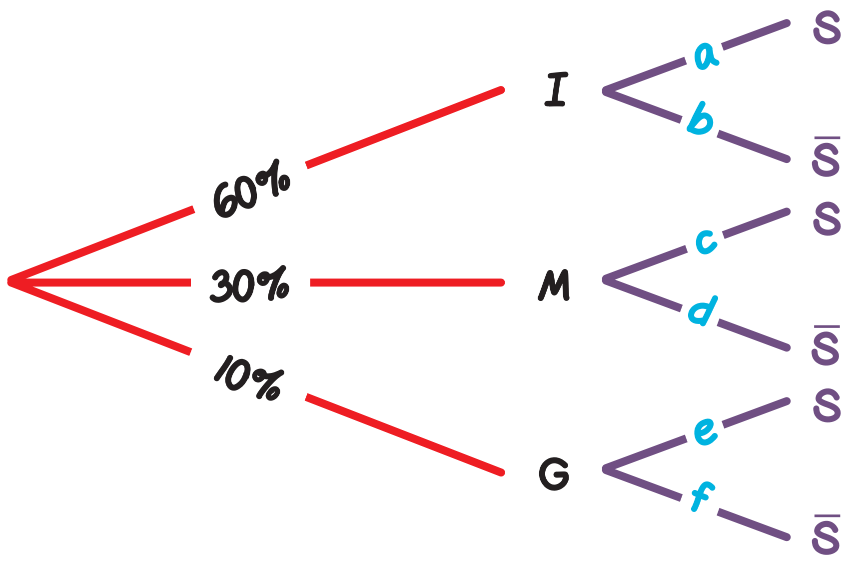
• $P_M(S) = 90\,\%$

• $P_M(\overline{S}) = 1 - 0,9 = 10\,\%.$

• $P_G(S) = 80\,\%$

• $P_G(\overline{S}) = 1 - 0,8 = 20\,\%.$

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 75\%$
- $b = 25\%$
- $c = 90\%$
- $d = 10\%$
- $e = 80\%$
- $f = 20\%$

.

Freemaths : Tous droits réservés

2. Calculons la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait:

Cela revient à calculer: $P(I \cap S)$.

$P(I \cap S) = P_I(S) \times P(I)$

$= 75\% \times 60\%$

$= 45\,\%.$

Ainsi: $P(I \cap S) = 45\%$.

3. Montrons que $P(S) = 0,8$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(S)$.

L'événement $S = (S \cap I) \cup (S \cap M) \cup (S \cap G)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(S) = P(S \cap I) + P(S \cap M) + P(S \cap G)$$

$$= P(I \cap S) + P_M(S) \times P(M) + P_G(S) \times P(G)$$

$$= 45\% + 90\% \times 30\% + 80\% \times 10\%$$

$$= 80\%.$$

Ainsi, nous avons bien: $P(S) = 0,8$.

4. Déterminons la probabilité qu'un client satisfait ait effectué son achat sur internet:

Déterminer la probabilité que le client ait effectué son achat sur internet, sachant qu'il est satisfait, revient à calculer: $P_S(I)$.

$$P_S(I) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(I \cap S)}{P(S)}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= \dfrac{45\%}{80\%}$

$\approx$ **56, 25%.**

Ainsi, la probabilité qu'un client satisfait ait effectué son achat sur internet est de: 56, 25% cad 56, 3% au millième près.

5. a. Justifions que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **contacter un échantillon de 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur**: le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise.

X est la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits dans cet échantillon.

Nous savons que: **la probabilité qu'un client soit satisfait = 80% = P (S).**

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 30 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: **S** et $\overline{\mathbf{S}}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de **S** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: **n = 30 et p = 80%.**

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(30\,;\,80\%)$.

5. b. Déterminons la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathbf{P\,(\,X \geqslant 25\,)}$, avec $X \rightsquigarrow B\,(30\,;\,80\%)$.

Freemaths : Tous droits réservés

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Or: $P(X \geqslant 25) = 1 - P(X \leqslant 24)$

$\approx 1 - 0,5725$

$\approx 42,75\%$ (calculatrice).

Donc la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits sur " 30 " est d'environ: $42,8\%$ à 10^{-3} près.

6. Déterminons la taille minimale recherchée de " n ":

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99, \text{ avec } Y \leadsto B(n;\, 20\%).$$

(Y car on s'intéresse aux clients pas satisfaits)

D'où ici: $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(Y < 1) \geqslant 0,99$

$\iff 1 - P(Y = 0) \geqslant 0,99$

$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,2)^0(1-0,2)^n \geqslant 0,99$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\iff 1 - (0,8)^n \geqslant 0,99$$

$$\iff (0,8)^n \leqslant 0,01$$

$$\iff n \ln(0,8) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \text{cad} \quad n \geqslant 21 \text{ clients.}$$

Ainsi, la taille minimale de l'échantillon de clients doit être de 21.

Freemaths : Tous droits réservés

7. a. Déterminons E (T) et V (T):

T_1 et T_2 sont indépendantes et de même loi de probabilité.

De plus, nous avons:
- $T = T_1 + T_2$
- $E(T_1) = 4$
- $V(T_1) = 2$
- $E(T_2) = 3$
- $V(T_2) = 1$.

Dans ces conditions:
- $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 7$ jours
- $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 3$ (jours)^2.

Ainsi: $E(T) = 7$ et $V(T) = 3$.

7. b. Justifions que $P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \frac{2}{3}$:

Pour répondre à cette question nous allons calculer: $P(5 \leqslant T \leqslant 9)$.

$$P(5 \leqslant T \leqslant 9) = P(4 < T < 10)$$
$$= P(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T))$$
$$= P(4 - 7 < T - E(T) < 10 - 7)$$
$$= P(-3 < T - E(T) < 3)$$
$$= P(|T - E(T)| < 3)$$
$$= 1 - P(|T - E(T)| \geqslant 3).$$

En ayant recours à **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant 1 - \frac{V(T)}{3^2}$$

$$\iff P(|T - E(T)| < 3) \geqslant 1 - \frac{3}{9}$$

$$\text{cad} \quad P(|T - E(T)| < 3) \geqslant \frac{2}{3}.$$

En conclusion nous avons bien: $P(5 \leqslant T \leqslant 9) \geqslant \frac{2}{3}$.

Freemaths : Tous droits réservés