

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude de la fonction f

1. Calculons f' sur $[-2, 5; 2, 5]$:

Ici: • $f(x) = \ln(-2x^2 + 13, 5)$ ($\ln(u)$)

• $Df = [-2, 5; 2, 5]$.

Posons: $f = \ln(g)$, avec: $g(x) = -2x^2 + 13, 5$.

g est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-2, 5; 2, 5]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-2, 5; 2, 5]$ comme composée ($\ln(g)$) de 2 fonctions dérivables sur $[-2, 5; 2, 5]$, avec: $g > 0$ sur $[-2, 5; 2, 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2, 5; 2, 5]$.

Pour tout $x \in [-2, 5; 2, 5]$: $f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13, 5} \left(\frac{u'}{u}\right)$.

Au total, pour tout $x \in [-2, 5; 2, 5]$: $f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13, 5}$.

2. a. Dressons le tableau de variation de f sur $[-2, 5; 2, 5]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2, 5; 2, 5]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-4x = 0$, cad: $x = 0$.

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4x < 0$, cad: $x > 0$ ou $x \in]0; 2,5]$.

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4x > 0$, cad: $x < 0$ ou $x \in [-2,5; 0[$.

Au total: • f est croissante sur $[-2,5; 0]$,
(car sur $[-2,5; 0]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[0; 2,5]$.
(car sur $[0; 2,5]$, $f'(x) \leq 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	$-2,5$	0	$2,5$
f'	$+$	0	$-$
f			

Avec: • $a = f(-2,5) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = \ln(13,5)$,

• $c = f(2,5) \Rightarrow c = 0$.

2. b. Dédouisons-en le signe de f sur $[-2,5; 2,5]$:

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que:

" Pour tout $x \in [-2,5; 2,5]$, $f(x) > 0$ ".

Partie B: Aire de la zone de creusement

1. La courbe \mathcal{C} est-elle un arc de cercle de centre O ?

Soient A et B les points tels que: $A(0; f(0))$ et $B(2,5; f(2,5))$.

Comme $OA \neq OB$, nous pouvons affirmer que: la courbe \mathcal{C} n'est pas un arc de cercle de centre O .

2. Justifions la valeur de l'aire \mathcal{A} :

Ici:
$$\mathcal{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x) dx.$$

Or: • f est paire sur $[-2,5; 2,5]$, cad: $f(-x) = f(x)$.

$$\left(\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \times \int_0^a f(x) dx \right)$$

• nous sommes en présence d'un repère orthonormal d'unité 2 mètres; donc une unité d'aire est égale à 4 (mètres)².

Dans ces conditions:
$$\mathcal{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x) dx \Leftrightarrow \mathcal{A} = 4 \times 2 \times \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

Au total, nous avons bien:
$$\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

3. a. Complétons le tableau en calculant les six valeurs manquantes:

Nous avons le tableau complété suivant:

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

Variables	
	R et S sont des réels
	n et k sont des entiers
Traitement	
	S prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
	Pour k variant de 1 à n faire
	R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$
	S prend la valeur $S + R$
	Fin Pour
	Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S , arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$ $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	0,130 116	0,130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0,519 981
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	0	5,197 538
Affichage	$S =$ 5,197 538		

3. b. Déduisons-en une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement:

En prenant $a = 5,197\,538$ et $n = 50$, nous obtenons:

$$5,197\,538 \leq I \leq 5,32\,767.$$

Comme: $A = 8 \times I$, $41,581 \leq A \leq 42,622$.

Ainsi, une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement est: $A = 42 \text{ m}^2$.