

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. Déterminons la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ :

Il s'agit ici de calculer:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$  (u x v)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Or, d'après le cours:  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$  (Théorème des croissances comparées).

Ainsi:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$

Au total:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$

2. Étudions le sens de variation de la fonction  $h$  sur  $[0; +\infty[$  et dressons son tableau de variations:

• Calculons  $h'$ :

Ici:  $h(x) = \frac{x}{e^x}$

•  $D_h = [0; +\infty[.$

Posons:  $h = \frac{h_1}{h_2}$ , avec:  $h_1(x) = x$  et  $h_2(x) = e^x.$

$h_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$h_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Par conséquent,  $h$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme quotient  $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$  de deux fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ , avec: pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $h_2(x) \neq 0$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $h'$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0; +\infty[: \quad h'(x) &= 1 \cdot x e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \quad (u' \cdot v + u \cdot v') \\ &\Rightarrow h'(x) = (1 - x) e^{-x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [0; +\infty[:$   $h'(x) = (1 - x) e^{-x}$ .

• Étudions le sens de variation de  $h'$  sur  $[0; +\infty[$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :

1<sup>er</sup> cas:  $h'(x) = 0$ .

$h'(x) = 0$  ssi  $x = 1$  (car sur  $[0; +\infty[:$   $e^{-x} > 0$ ).

2<sup>ème</sup> cas:  $h'(x) < 0$ .

$h'(x) < 0$  ssi  $x > 1$  (car sur  $[0; +\infty[:$   $e^{-x} > 0$ ).

3<sup>ème</sup> cas:  $h'(x) > 0$ .

$h'(x) > 0$  ssi  $x < 1$  (car sur  $[0; +\infty[:$   $e^{-x} > 0$ ).

Au total: •  $h$  est croissante sur  $[0; 1]$ ,

(car sur  $[0; 1]$ ,  $h'(x) \geq 0$ )

•  $h$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

(car sur  $[1; +\infty[$ ,  $h'(x) \leq 0$ )

• **Tableau de variation:**

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

$x$	0	1	$+\infty$
$h'$	+	0	-
$h$			

Avec: •  $a = h(0) \Rightarrow a = 0$ ,

•  $b = h(1) \Rightarrow b = e^{-1}$ ,

•  $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \Rightarrow c = 0$ .

3. a. Vérifions que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $h(x) = e^{-x} - h'(x)$ :

Nous savons que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :

•  $h(x) = xe^{-x}$

•  $h'(x) = (1-x)e^{-x}$ .

Ainsi:  $e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (1-x)e^{-x}$

$$= xe^{-x}.$$

Au total, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , nous avons bien:  $h(x) = e^{-x} - h'(x)$ .

### 3. b. Déterminons une primitive de $e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$ :

Une primitive de  $e^{-x}$  sur  $[0; +\infty[$  est:  $-e^{-x}$ .

Ainsi, sur  $[0; +\infty[$ ,  $e^{-x}$  admet comme primitive:  $-e^{-x}$ .

### 3. c. Déduisons-en une primitive de la fonction $h$ sur $[0; +\infty[$ :

$h$  est continue sur  $[0; +\infty[$ , elle admet donc une primitive sur  $[0; +\infty[$  cad une fonction  $H$  dérivable sur  $[0; +\infty[$  avec:  $H' = h$ .

$$\begin{aligned} \text{Ici: } H(x) &= \int h(x) dx \\ &= \int (e^{-x} - h'(x)) dx \\ &= \int e^{-x} dx - \int h'(x) dx \\ &= -e^{-x} - h(x). \end{aligned}$$

Et nous avons bien, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :  $H'(x) = e^{-x} - h'(x)$ .

Au total, sur  $[0; +\infty[$ , une primitive de  $h$  est:

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) \text{ ou } H(x) = -(1+x)e^{-x}.$$

## Partie B:

### 1. a. Déterminons la valeur de $x$ pour laquelle la distance $MN$ est maximale et donnons cette distance:

Nous savons que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :

$$\bullet f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \iff f(x) = h(x) + \ln(x+1),$$

$$\bullet g(x) = \ln(x+1) \iff g(x) = f(x) - h(x).$$

La distance  $MN$  est maximale quand  $f(x) - g(x)$  est maximale, ce qui revient à dire quand:  $h(x)$  est maximale.

Or  $h(x)$  est maximale quand:  $x = 1$  (d'après 2.).

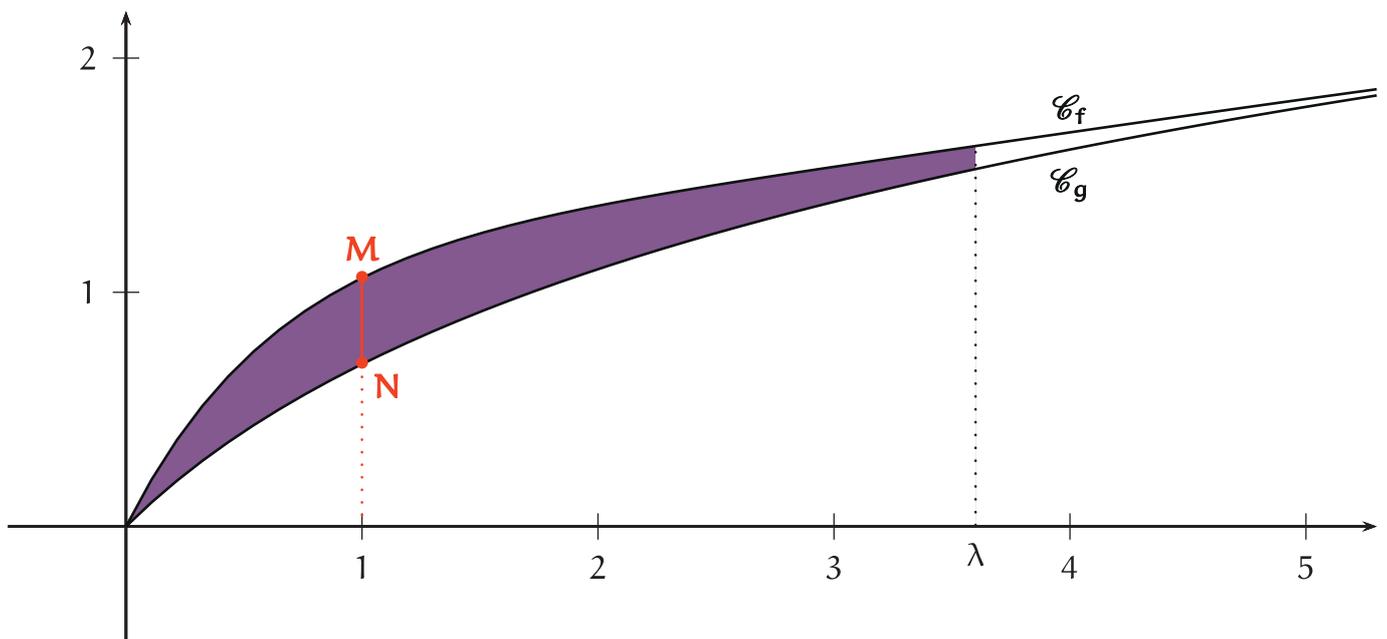
**Au total:**

- la valeur de  $x$  pour laquelle la distance  $MN$  est maximale est:  $x = 1$ ,
- la distance maximale est:  $h(1) = e^{-1}$ .

1. b. Plaçons sur le graphique, les points  $M$  et  $N$  correspondant à la valeur maximale de  $MN$ :

Nous pouvons représenter les points  $M$  et  $N$  demandés sur le graphique suivant:

Freemaths: Tous droits réservés



Notons que les coordonnées des points  $M$  et  $N$  sont respectivement:

$$M(1; f(1)) \text{ cad } M(1; e^{-1} + \ln(2)) \text{ et } N(1; g(1)) \text{ cad } N(1; \ln(2)).$$

2. a. Hachurons le domaine  $D_\lambda$ :

Fait sur graphique précédent.

2. b. Démontrons que  $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(\lambda + 1)}{e^\lambda}$ :

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire  $\mathcal{A}_\lambda$  du domaine délimité par les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$ , est telle que:

$$\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Or: } \mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) dx \iff \mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (h(x)) dx$$

$$\iff \mathcal{A}_\lambda = [H(x)]_0^\lambda \quad (\text{d'après 3.})$$

$$\iff \mathcal{A}_\lambda = [-(1+x)e^{-x}]_0^\lambda$$

$$\implies \mathcal{A}_\lambda = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}.$$

Au total, nous avons bien:  $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(1+\lambda)}{e^\lambda}$ .

2. c. Calculons la limite de  $\mathcal{A}_\lambda$  en  $+\infty$  et interprétons le résultat:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(1+\lambda)}{e^\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}.$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0 \quad (\text{d'après le cours}),$$

$$\bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \quad (\text{d'après le Théorème des croissances comparées}).$$

D'où:  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1.$

Au total:  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1 \text{ u.a.}$

Cela signifie que quand  $\lambda$  tend vers l'infini ("  $\lambda$  " très grand), l'aire de la zone hachurée  $A_\lambda$  tendra vers 1 u.a.

3. a. Déterminons la valeur affichée (de  $\lambda$ ) par l'algorithme quand  $S = 0,8$ :

A l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, nous trouvons:

- quand  $\lambda = 2$ ,  $A_2 < 0,8$   $\left( A_2 = 1 - \frac{3}{e^2} \right)$
- quand  $\lambda = 3$ ,  $A_3 \geq 0,8$   $\left( A_3 = 1 - \frac{4}{e^3} \right).$

Au total, la valeur affichée par l'algorithme quand  $S = 0,8$  est:  $\lambda = 3.$

3. b. Déterminons le rôle de cet algorithme:

Le rôle de cet algorithme est d'afficher la première valeur entière de  $\lambda$  pour laquelle  $A_\lambda \geq S.$