Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 7

CORRECTION

1. Montrons que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [\,1\,;5\,]$, $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$:

Ici: • $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $Df = [\,1\,;5\,]$.

Posons: $f_n = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = \ln(x)$ et $f_2(x) = x^n$.

f_1 est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur l'intervalle $[\,1\,;5\,]$.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,1\,;5\,]$.

Par conséquent, f_n est dérivable sur $[\,1\,;5\,]$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\,1\,;5\,]$, avec: pour tout $x \in [\,1\,;5\,]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f_n' pour tout $x \in [\,1\,;5\,]$.

Pour tout $x \in [\,1\,;5\,]$:

$$f_n'(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{x}\right) \times (x^n) - (\ln(x)) \times (n\,x^{n-1})}{(x^n)^2} \qquad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{x^{n-1} - n\,x^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\,(1 - n\ln(x))}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^{-1}\,(1 - n\ln(x))}{x^{n}}$$

$$= \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1\,;5\,]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$

2. Montrons que tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$:

D'après l'énoncé: **" on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[\,1\,;5\,]$ "**.

Soit $A_n\,(x_n\,;y_n)$, le maximum de la fonction f_n sur $[\,1\,;5\,]$.

L'abscisse x_n vérifie donc: $f_n'(x_n) = 0$.

$$f_n'(x_n) = 0 \iff \frac{1 - n\ln(x_n)}{x_n^{\,n+1}} = 0$$

$$\iff 1 - n\ln(x_n) = 0, \quad \text{car: sur } [\,1\,;5\,],\ x_n^{\,n+1} \neq 0$$

$$\iff x_n = e^{\frac{1}{n}}.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du point A_n sont respectivement:

$$x_n = e^{\frac{1}{n}} \ \text{ et } \ y_n = f(x_n) = \frac{\ln(x_n)}{x_n^{\,n}},$$

$$\text{ou: } \ x_n = e^{\frac{1}{n}} \ \text{ et } \ y_n = \frac{\frac{1}{n}}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{1}{n \times e}.$$

Or: $\frac{1}{n \times e} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \times \ln(x_n).$$

D'où, nous avons: $y_n = \frac{1}{e} \times \ln(x_n)$, pour tout $x \in [\,1 ; 5\,]$.

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1 ; 5\,]$, tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation: $y_n = \frac{1}{e} \ln(x_n)$.

3. a. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1 ; 5\,]$, $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1 ; 5\,]$, nous avons:

$$1 \leqslant x \leqslant 5$$

$$\Longleftrightarrow \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{0}{x^n} \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}, \quad \text{avec: pour tout } x \in [\,1 ; 5\,],\ x^n > 0$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1 ; 5\,]$: $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$.

3. b. Montrons l'égalité demandée pour tout entier $n > 1$:

f_n est continue sur $[\,1 ; 5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,1 ; 5\,]$ et par conséquent: $\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$ existe.

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_1^5$$

$$= \frac{1}{1-n}\left(5^{1-n} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - 5^{1-n} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

Au total, pour tout entier $n > 1$ et $x \in [\, 1 ; 5 \,]$: $\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$.

3. c. Déterminons la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers +∞:

L'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe $\mathcal{C}_n$ cad l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$ correspond à: $\int_1^5 f_n(x)\,dx$.

Or: $\int_1^5 f_n(x)\,dx = \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx$,

et d'après la question **3. b.**: $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$.

Posons pour tout $x \in [\, 1 ; 5 \,]$: • $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$,

- $g_1(x) = 0$,

- $g_2(x) = \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

Notons que: • les fonctions f_n, g_1 et g_2 sont continues sur $[1; 5]$;

• elles admettent donc des primitives sur $[1; 5]$, et par conséquent:

$$\int_1^5 f_n(x)\,dx,\ \int_1^5 g_1(x)\,dx \text{ et } \int_1^5 g_2(x)\,dx \text{ existent;}$$

• de plus, les fonctions f_n, g_1 et g_2 sont positives sur $[1; 5]$;

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

$$\iff g_1(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_2(x)$$

$$\iff \int_1^5 g_1(x)\,dx \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \int_1^5 g_2(x)\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \ln(5)\left[\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)\right]$$, d'après question 3. b.

$$\iff 0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{\ln(5)}{n-1} - \frac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})}.$$

Or quand n tend vers $+\infty$: • $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche)

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(5)}{n-1} - \dfrac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})}\right) = 0$ (terme de droite).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^5 f_n(x)\, dx = 0.$$

Au total, la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers +∞ est:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^5 f_n(x)\, dx = 0.$$