Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 6

CORRECTION

1. Montrons que $I_0 = \ln(2)$:

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: • $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$,

• $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx$.

Soit h, la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par: $h(x) = \frac{1}{1-x}$.

La fonction h est continue sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ (avec $1 - x \neq 0$), elle admet donc des primitives sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et par conséquent: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx$ existe.

D'où: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx$

$= -\left[\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1)\right)$

$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ cad: $I_0 = \ln(2)$.

Donc nous avons bien: $I_0 = \ln(2)$.

2. a. Calculons $I_0 - I_1$:

$$I_0 - I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx$$

$$= \Big[\, x \,\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Au total: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

2. b. Déduisons-en I_1:

Nous savons que:
- $I_0 = \ln(2)$
- $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

D'où: $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$ cad: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

Ainsi: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \times (1-x)}{(1-x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{cad:} \quad I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Au total, nous avons bien: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

3. b. Proposons l'algorithme demandée:

L'algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n est le suivant:

```
I ← ln(2)
k ← 0
Tant que k < n faire
    | k ← k + 1
    | I ← I - (1/2)^k / k
Fin Tant que
Afficher I
```

4. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$:

Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g_1(x) = 0$,
- $f(x) = \dfrac{x^n}{1 - x}$,
- $g_2(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Notons que:

- les fonctions g_1, f et g_2 sont continues sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$;
- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, et par conséquent:

  $\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x)\,dx$ existent;
- de plus, les fonctions g_1, f et g_2 sont positives sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1 - x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\iff g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$$

$$\iff \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x)\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1 - x}\right) dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1 - x}\right) dx \leqslant \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. $\quad$ **(a)**

4. b. Déduisons-en la limite de la suite (I_n) en $+\infty$:

Quand n tend vers $+\infty$:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche de **(a)**)
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ (terme de droite de **(a)**).

D'où d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

Au total: $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

5. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = I_0 - I_n$:

Pour tout entier naturel n non nul, nous avons:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$= [\, I_0 - I_1 \,] + [\, I_1 - I_2 \,] + [\, I_2 - I_3 \,] + \ldots + [\, I_{n-1} - I_n \,]$$

$$\left(\text{car: } \quad I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \right)$$

cad: $\quad S_n = I_0 - I_n$, après simplification !

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $S_n = I_0 - I_n$.

5. b. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} I_0 - I_n$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} I_0\right) - \left(\lim_{n \to +\infty} I_n\right)$$

$$= \ln(2) - 0$$

$$= \ln(2).$$

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$.