Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 5

CORRECTION

Partie A:

1. f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ?

Soit h une fonction polynôme du second degré définie sur $]0; 1]$ par:

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec: } a \in IR^*, b \in IR \text{ et } c \in IR.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = c$. $(\neq -\infty)$

Or: $c \in IR$ et est un nombre fini, donc différent de " $-\infty$ ".

Ainsi: f ne peut donc pas être une fonction polynôme du second degré.

2. a. Déterminons le réel k pour que la fonction respecte les trois conditions:

Ici:
- $g(x) = k \ln(x)$
- $Dg =]0; 1]$.

Pour rappel, les conditions sont:
(1) $g(1) = 0$,

(2) $g'(1) = 0,25$,

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$.

La fonction g est dérivable sur] 0; +∞] comme fonction " ln ", donc dérivable sur l'intervalle] 0; 1].

Ainsi, nous pouvons calculer g' sur] 0; 1].

Pour tout $x \in]\,0;\,1\,]$: $g'(x) = \frac{k}{x}$.

Vérification des trois conditions:

- $g(1) = 0$ ssi $k \times 0 = 0$ cad ssi: $k \in I\!R$.

- $g'(1) = 0,25$ ssi $\frac{k}{1} = 0,25$ cad ssi: $k = 0,25$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ ssi: $k > 0$. (car: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$)

Ainsi, les trois conditions sont réunies ssi: $k = 0,25$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in]\,0;\,1\,]$: $g(x) = 0,25 \ln x$.

2. b. La courbe représentative de g coïncide-t-elle avec celle de f ?

Non, la courbe représentative de g ne coïncide pas avec celle de f.

En effet, pour le prouver, il suffit de prendre un contre-exemple:

quand $x = 0,5$: $f(x) = 0,75$ et $g(x) = 0,25 \times \ln(0,5) \neq 0,75$.

Ainsi: non, la courbe représentative de g ne coïncide pas avec celle de f.

3. Déterminons les réels a et b pour que la fonction h vérifie les trois conditions:

Ici: • $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$, $a \in I\!R$ et $b \in I\!R$

• $Dh =]\,0;\,1\,]$.

La dérivée de la fonction h sur] 0; 1] est: $h'(x) = \frac{-4a}{x^5} + b$.

Vérification des trois conditions:

- $h(1) = 0$ ssi $\frac{a}{1} + b \times 1 = 0$ cad ssi: $a = -b$.
- $h'(1) = 0,25$ ssi $\frac{-4a}{(1)^5} + b = 0,25$ cad ssi: $-4a + b = 0,25$.
- $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$ ssi: $a < 0$.

Par conséquent, les trois conditions sont réunies ssi:

$$\begin{cases} a = -b \\ -4a + b = 0,25 \\ a < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -0,05 < 0 \\ b = 0,05 \end{cases}.$$

Au total, les réels a et b demandés sont: $a = -0,05$ et $b = 0,05$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in]0; 1]$: $h(x) = \frac{-0,05}{x^4} + 0,05x$.

Partie B:

1. a. Justifions que l'équation $f(x) = -5$ admet sur] 0; 1] une unique solution α:

Ici: • $f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right)$

• $Df =]0; 1]$.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour pouvoir répondre à cette question.

• Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a ; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a ; b]$.

• Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a ; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a ; b]$.

Or ici: • f est continue sur $]0 ; 1]$.

• " $k = -5$ " est compris entre: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty < 0$

et: $f(1) = 0$.

• f est strictement croissante sur $]0 ; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = -5$ $(k = -5)$ admet une unique solution notée α appartenant à $]0 ; 1]$.

Au total: $f(x) = -5$ admet exactement une solution unique α sur $]0 ; 1]$.

1. b. Déterminons une valeur approchée à 10^{-2} près de " α ":

A l'aide d'une machine à calculer: $\alpha \approx 0,32$.

Ainsi une valeur approchée à 10^{-2} près de α est environ: $0,32 \in]0 ; 1]$.

2. a. Déterminons sa fonction dérivée:

Ici: • $u(x) = \frac{1}{2x^2}$

• $D_u =]0; 1]$.

La dérivée de la fonction u sur $]0; 1]$ est: $u'(x) = \frac{-1}{x^3} < 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1]$: $u'(x) = \frac{-1}{x^3}$.

2. b. Déterminons la valeur exacte et une valeur approchée de V:

D'après l'énoncé: $V = \int_\alpha^1 \pi\, x^2 f'(x)\, dx$.

D'où: $V = \pi \int_\alpha^1 x^2 \times \left(\frac{1}{20} \left(1 + \frac{4}{x^5} \right) \right) dx$

$= \frac{\pi}{20} \int_\alpha^1 \left(x^2 + 4 \times \frac{1}{x^3} \right) dx$

$= \frac{\pi}{20} \left[\frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{1}{2x^2} \right]_\alpha^1$

$= \frac{\pi}{20} \left(-\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$

$\approx 2,8$ cm^3. (avec: $\alpha \approx 0,32$)

Au total: • la valeur exacte de V est $\frac{\pi}{20} \left(-\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$,

• une valeur approchée de V est **2, 8 cm^3**.