

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. a). Calculons  $f'$  sur l'intervalle  $]0; 1[$ :

Ici: •  $f(x) = x(1 - \ln x)^2$        $(u \times (v)^2)$

•  $Df = ]0; 1[$ .

Posons:  $f = f_1 \times (f_2 + f_3)^2$ , avec:  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 1$  et  $f_3(x) = -\ln x$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle  $]0; 1[$ .

$f_3$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  [ comme fonction "ln", donc dérivable sur l'intervalle  $]0; 1[$ .

Dans ces conditions, la fonction  $f_2 + f_3$  est dérivable sur  $]0; 1[$  comme somme de deux fonctions dérivables sur  $]0; 1[$ .

De même, la fonction  $h(x) = (f_2 + f_3)^2$  est dérivable sur  $]0; 1[$  comme composée de deux fonctions dérivables sur  $]0; 1[$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$  comme produit ( $f, \times h$ ) de deux fonctions dérivables sur  $]0; 1[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in ]0; 1[$ .

Pour tout  $x \in ]0; 1[$ :  $f'(x) = (1) \times (1 - \ln x)^2 + (x) \times (2) \times (1 - \ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$$(u' \times (v)^2 + u \times 2 \times (v)' \times v')$$

$$((w^n)' = n(w^{n-1}) \times w')$$

cad:  $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$ .

Au total, pour tout  $x \in ]0; 1]$ :  $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$ .

1. a2. Factorisons  $f'$  sur  $]0; 1]$ :

Pour tout  $x \in ]0; 1]$ :  $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$

$$= (1 - \ln x) \times (1 - \ln x) - 2 + 2 \ln x$$

$$= 1 - \ln x - \ln x + (\ln x)^2 - 2 + 2 \ln x$$

$$= (\ln x)^2 - 1$$

$$= (\ln x + 1)(\ln x - 1) \quad (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b).$$

Au total, pour tout  $x \in ]0; 1]$ , nous avons bien:  $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$ .

1. b. Etudions les variations de  $f$  et dressons le tableau de variations sur l'intervalle  $]0; 1]$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in ]0; 1]$ , sachant que:

$$\ln x - 1 < 0 \text{ sur } ]0; 1].$$

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } \ln x + 1 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \leq e^{-1} \text{ ou: } x \in ]0; e^{-1}].$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } \ln x + 1 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \geq e^{-1} \text{ ou: } x \in [e^{-1}; 1].$$

Au total: •  $f$  est croissante sur  $]0; e^{-1}]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[e^{-1}; 1]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

$x$	$0$	$e^{-1}$	$1$
$f'$		+	-
$f$	$a$	$b$	$c$

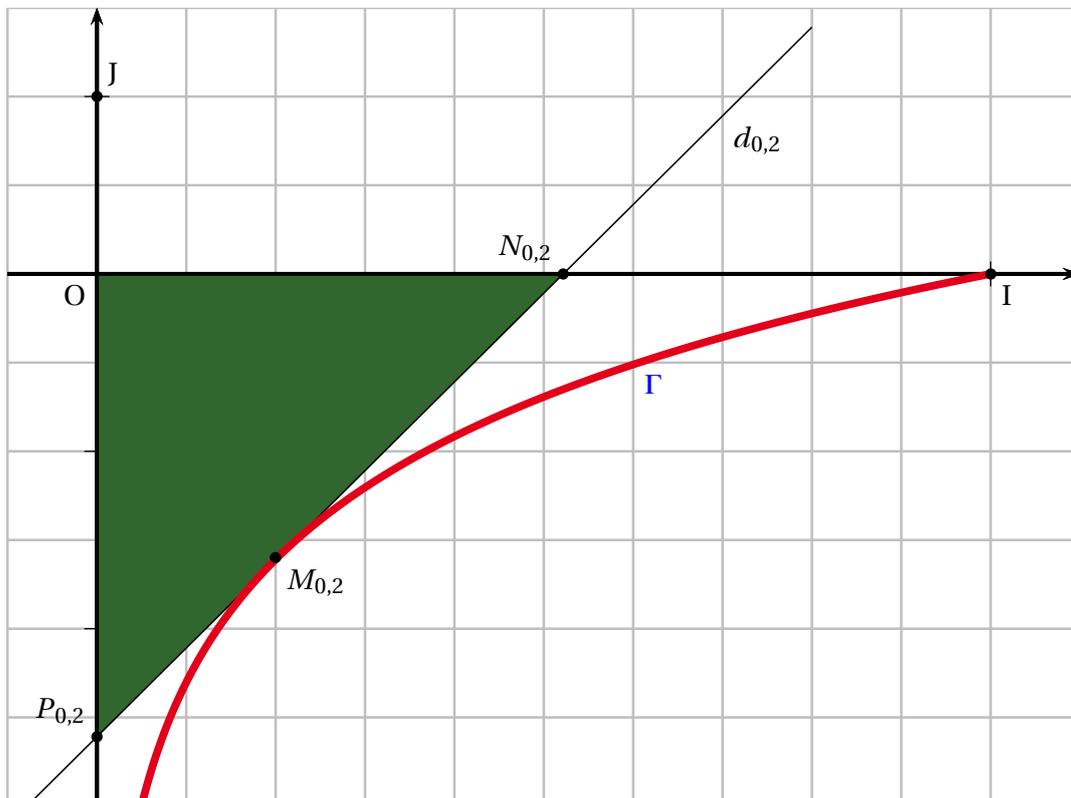
Avec: •  $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , (d'après l'énoncé)

•  $b = f(e^{-1}) = 4e^{-1}$ ,

•  $c = f(1) = 1$ .

2. a. Déterminons graphiquement une estimation de l'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  en unités d'aire:

L'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  correspond à la zone verte du graphique suivant:



Approximativement, cette zone verte correspond à la moitié du rectangle ayant pour côtés:  $ON_{0,2}$  et  $OP_{0,2}$ .

- Or:
- $ON_{0,2} \approx 0,5$ , (5 carreaux avec:  $OI = 10$  carreaux)
  - $OP_{0,2} \approx 2,5$ . (5 carreaux avec:  $OJ = 2$  carreaux)

Dans ces conditions une estimation de l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  est:

$$\mathcal{A} \approx \frac{0,5 \times 2,5}{2} \quad \text{cad:} \quad \mathcal{A} \approx 0,625 \text{ u.a.}$$

Au total, graphiquement une estimation de l'aire demandée est:  $\mathcal{A} \approx 0,625 \text{ u.a.}$

2. b. Déterminons une équation de la tangente  $d_{0,2}$ :

L'équation réduite de la tangente  $d_{0,2}$  au point  $M(0,2; \ln(0,2))$  s'écrit:

$$\begin{aligned} y &= g'(x_M)(x - x_M) + g(x_M) \\ &= g'(0,2)(x - 0,2) + \ln(0,2). \end{aligned}$$

- Or ici:
- $g(x) = \ln x$ ,
  - $g'(x) = \frac{1}{x}$ , pour tout  $x \in ]0; 1]$ ,
  - $g'(0,2) = 5$ .

Dans ces conditions:  $y = 5x(x - 0,2) + \ln(0,2)$

$$\text{cad:} \quad y = 5x + (-1 + \ln(0,2)).$$

Au total, une équation de la tangente  $d_{0,2}$  est:  $y = 5x + (-1 + \ln(0,2))$ .

2. c. Calculons la valeur exacte de l'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$ :

Nous savons que la tangente  $d_{0,2}$  passe par les points  $N_{0,2}$  et  $P_{0,2}$ .

Sachant que son équation est:  $y_d = 5x_d + (-1 + \ln(0,2))$ , les points  $N_{0,2}$  et  $P_{0,2}$  ont pour coordonnées respectives:  $N_{0,2}(x_{dN}; 0)$  et  $P_{0,2}(0; y_{dP})$ .

Déterminons  $x_{dN}$  et  $y_{dP}$ :

•  $x_{dN}$  est tel que:  $0 = 5x_{dN} + (-1 + \ln(0,2))$  cad:  $x_{dN} = \frac{1 - \ln(0,2)}{5} > 0$ .

•  $y_{dP}$  est tel que:  $y_{dP} = 5 \times 0 + (-1 + \ln(0,2))$  cad:  $y_{dP} = -1 + \ln(0,2) < 0$ .

Dans ces conditions, l'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  est:

$$\mathcal{A} = \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1 - \ln(0,2)}{5}\right) \times (1 - \ln(0,2)) \text{ (car: } |-1 + \ln(0,2)| = 1 - \ln(0,2))$$

$$\approx \frac{1}{10} \times 6,81$$

cad:  $\mathcal{A} \approx 0,681 \text{ u.a.}$

Au total, la valeur exacte du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  est d'environ:  $\mathcal{A} \approx 0,681 \text{ u.a.}$

3. a. Déterminons pour quelle valeur de "a" l'aire  $\mathcal{A}(a)$  est maximale:

Ici:  $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2} a (1 - \ln a)^2$ .

Cette aire est maximale quand:  $\mathcal{A}'(a) = 0$ .

$$\mathcal{A}'(a) = 0 \iff \frac{1}{2} \times (1) \times (1 - \ln a)^2 + \left(\frac{1}{2} a\right) \times (2) \times (1 - \ln a)' \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln a)^2 - 2(1 - \ln a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln a) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = e^{-1}.$$

Ainsi, l'aire  $\mathcal{A}(a)$  est maximale quand:  $a = e^{-1}$ .

3. b. Déterminons cette aire maximale:

Cette aire maximale notée  $\mathcal{A}_{\max}$  est:

$$\mathcal{A}_{\max} = \frac{1}{2} \times (e^{-1}) \times (1 - \ln(e^{-1}))^2$$

$$= 2e^{-1} \text{ u.a.}$$

Au total, cette aire maximale est:  $\mathcal{A}_{\max} = 2e^{-1} \text{ u.a.}$