Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 35

CORRECTION

Partie A: Étude de quelques exemples

1. a. Déterminons la valeur de " a " si f est une fonction constante strictement positive:

Si f est une fonction constante strictement positive, nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) = K$, avec $K > 0$.

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que: $I_1 = I_2$, avec: $I_1 = \int_0^a f(x)dx$

et: $I_2 = \int_a^1 f(x)dx$.

f est continue sur $[0;1]$, donc sur $[0;a]$ et $[a;1]$. Elle admet donc des primitives sur $[0;a]$ et $[a;1]$ et par conséquent: I_1 et I_2 existent.

Dans ces conditions: $I_1 = I_2 \iff \int_0^a K dx = \int_a^1 K dx$

$\iff [K.x]_0^a = [K.x]_a^1$

$\iff a.K = K - a.K$

$\implies a = \frac{1}{2}$.

Au total, si f est une fonction constante strictement positive:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \quad \text{ssi} \quad a = \frac{1}{2}.$$

1. b. Déterminons la valeur de " a " si, sur $[0;1]$, $f(x) = x$:

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que: $I_1 = I_2$.

La fonction $f(x) = x$ est continue sur $[0;1]$, donc sur $[0;a]$ et $[a;1]$. Elle admet donc des primitives sur $[0;a]$ et $[a;1]$ et par conséquent: I_1 et I_2 existent.

Dans ces conditions: $I_1 = I_2 \iff \int_0^a x\,dx = \int_a^1 x\,dx$

$$\iff \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1$$

$$\iff \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\iff a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{car: } a \in [0;1].$$

Au total, si $f(x) = x$: $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ ssi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. En unités d'aires, exprimons $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$:

Comme vu précédemment:
- $\mathscr{A}_1 = \int_0^a f(x)\,dx$
- $\mathscr{A}_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$.

2. b. b1. Démontrons que si " a " satisfait (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^1 f(x)\,dx.$$

$$\iff [F(x)]_0^a = [F(x)]_a^1$$

$$\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a)$$

$$\iff 2F(a) = F(1) + F(0)$$

$$\iff F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

Au total, si " a " satisfait la condition (E) alors nous avons bien:

$$F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

2. b. b2. La réciproque est-elle vraie ?

Oui la réciproque est vraie car dans la question précédente, tout a été démontré à l'aide d'équivalences.

3. a. Déterminons le réel " a " tel que la condition (E) soit remplie avec $f(x) = e^x$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff \int_0^a f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx.$$

$$\iff \int_0^a e^x dx = \int_a^1 e^x dx$$

$$\iff [e^x]_0^a = [e^x]_a^1$$

$$\iff e^a - 1 = e - e^a$$

$$\iff 2e^a = e + 1$$

$$\iff e^a = \frac{e+1}{2}$$

$$\Rightarrow \; a = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right), \quad \text{avec: } \frac{e+1}{2} > 0.$$

Au total, quand $f(x) = e^x$, la condition (E) est remplie avec:

$$a = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right), \text{ a étant unique.}$$

3. b. Vérifions que $a = \frac{2}{5}$ quand $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff \int_0^a f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx$$

$$\iff \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2}dx = \int_a^1 \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$\iff \left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^a = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_a^1$$

$$\iff \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{a+2}$$

$$\iff \frac{2}{a+2} = \frac{5}{6}$$

$$\iff 5a + 10 = 12$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

Au total, nous avons bien: $a = \frac{2}{5}.$

Partie B: Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de " a "

1. Démontrons que si a est un réel satisfaisant (E), alors a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$:

D'après l'énoncé:

- a ∈ IR et vérifie la condition (E),
- (E): " les aires A_1 et A_2 sont égales ",
- a est tel que: $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$ (F = primitive de f),
- pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = 4 - 3x^2$.

Sur [0; 1], la fonction f admet comme primitive la fonction F,

avec: pour tout $x \in [0; 1]$, $F(x) = 4x - x^3$.

Dans ces conditions: $F(0) = 0$ et $F(1) = 4 - 1 \Rightarrow F(1) = 3$.

D'où: $\frac{F(0)+F(1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Or a est tel que: $F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$ => $F(a) = \frac{3}{2}$.

$F(a) = \frac{3}{2}$ <=> $4a - a^3 = \frac{3}{2}$ (car $F(x) = 4x - x^3$)

<=> $a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation: $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2. a. Calculons U_1:

D'après l'énoncé:

$$\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in [0; 1],\ g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}, \\ \bullet\ U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$$

Ainsi: $U_1 = g(U_0)$ <=> $U_1 = g(0)$ => $U_1 = \frac{3}{8}$.

D'où: $U_1 = \frac{3}{8}$.

2. b. Démontrons que g est croissante sur [0; 1]:

Pour cela, nous devons calculer la dérivée de g sur [0; 1].

Or g est dérivable sur ¨ comme fonction polynôme.

Donc g est dérivable sur [0; 1] et nous avons: $g'(x) = \frac{3}{4}x^2$.

Or pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) \geq 0$.

Donc nous pouvons affirmer que sur [0; 1]: g est croissante.

2. c. **Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:**

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: • $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant \underbrace{0,388}_{U_2} \leqslant 1$.

Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ et montrons qu'alors: $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$.

Supposons: $\underbrace{0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

Comme g est croissante sur [0 ; 1], nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow g(0) \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant g(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

2. d. Montrons que la suite (U_n) est convergente et converge vers a:

Nous savons que:

- $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.

  Donc (U_n) est croissante.

- $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

  Donc (U_n) est majorée par $M = 1$.

Dans ces conditions, (U_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

Soit " L " la limite de la suite (U_n).

" L " est unique et est telle que: $g(L) = L$.

$g(L) = L \iff \dfrac{L^3}{4} + \dfrac{3}{8} = L$.

Or, d'après la question 1., l'équation $\dfrac{L^3}{4} + \dfrac{3}{8} = L$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; 1]$: " a ".

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers: $L = a$.

2. e. Calculons U_{10} à 10^{-8} près:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $U_{10} = 0,38980784$.